المـــــــادة:	الرياضيات	NS23	المعامل:	7
الشعـــــب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض (الترجمة الإسبانية)		مدة الإنجاز:	3

Informaciones generales

- Esta permitido el uso de calculadora no programable
- Tiempo para re'alizar la prueba : 3 horas
- Numero de paginas :3 paginas(la primera pagina contiene informaciones y las dos restantes contiene los ejercicios del examen
- El candidato puede realizar los ejercicios del examen segun el orden que le conviene
- Hay que evitar el uso del color rojo en la redaccion de las respuestas
- Aunque algunos simbolos estan repetidos en mas de un ejercicio,cada uno de ellos esta relacionado con el ejercicio en el que se utiliza y no tiene ninguna relacion con los ejercicios anteriores o posteriores

Informaciones especificas

- La prueba se compone de cinco ejercicios independientes entre si y repartidos segun los siguientes dominios como sigue :

Ejercicio	Dominio	puntos atribuidos
Primer ejercicio	Geometria del espacio	3 puntos
Segundo ejercicio	Numeros complejos	3 puntos
Tercer ejercicio	Calculo de probabilidades	3 puntos
Cuarto ejercicio	Suseciones numericas	3 puntos
Quinto ejercicio	Estudio de funciones y calculo integral	8 puntos

- En el cuarto ejercicio (Tercera pregunta), ln simboliza la funcion logaritmo neperiano

Primer ejercicio(3 puntos)

En el espacio provisto de un sistema de referencia ortonormal directo $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, consideramos los puntos $A(-1,0,3)$, $B(3,0,0)$ y $C(7,1,-3)$ y (S) la esfera de ecuacion : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 1) Demostrar que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ y deducir que $3x+4z-9=0$ es una ecuacion del plano (ABC)

0.5 2)Demostrar que (S) es la esfera de centro $\Omega(3,1,0)$ y de radio 5

3)Sea (Δ) la recta que pasa por Ω y que es perpendicular al plano (ABC)

0.5 a)Demostra que $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases}$ $(t\in IR)$ es una representacion parametrica de la recta (Δ)

1 b)Demostrar que la recta (Δ) corta a la esfera (S) en los dos puntos $E(6,1,4)$ y $F(0,1,-4)$

Segundo ejercicio (3 puntos)

1 1) Resolver en **C** el conjunto de » los numeros complejos la ecuacio $z^2-6z+10=0$

2)Consideramos en el plano provisto de un sistema de referencia ortonormal directo $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ los puntos A , B y C cuyos afijos son respectivamente : $a=3-i$, $b=3+i$ y $c=7-3i$.

Sea z el afijo de un punto M del plano y z' el afijo del punto M' imagen de M por el giro R

de centro A y de angulo $\frac{\pi}{2}$

0.5 a) Demostra que $z'=iz+2-4i$

0.25 b)Verificar que el afijo del punto C' imagen de C por el giro R es $c'=5+3i$

1.25 c)Demostra que $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ y deducir que el triangulo BCC' es rectangulo en B y que $BC=2BC'$

Tercer ejercicio (3 puntos)

Una urna contiene diez bolas : cinco blancas , tres rojas y deux negras (las bolas son indiscernables al tacto)Extraemos ,al azar,y al mismo tiempo,cuatro bolas de la bolsa.

1)Consideramos los dos sucesos : A « Obtener una bola roja y una solamente »

y B « Obtener una bola blanca al menos »

1 Demostrar que $P(A)=\frac{1}{2}$ y que $P(B)=\frac{41}{42}$

2) Sea X la variable aleatoria que asocia a cada extraccion el numero de bolas rojas extraidas

0.25 a) Verificar que los valores que toma la variable X son 0 , 1 , 2 y 3

1 b) Demostrar que $P(X=2)=\frac{3}{10}$ y que $P(X=0)=\frac{1}{6}$

0.75 c) Dar la ley de probabilidad de la variable aleatoria X

Cuarto ejercicio (3 puntos)

Consideramos la sucesion numerica (u_n) definida por lo siguiente : $u_0=2$ y $u_{n+1}=\frac{3u_n-1}{2u_n}$ para todo n en IN

0.75 1)Demostrar por induccion que : $u_n>1$ para todo n en IN

2)Consideramos la sucesion numerica (v_n) definida por : $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$ para todo n en IN

1 a) Demostrar que : (v_n) es una sucesion geometrica de razon $\frac{1}{2}$ y deducir que $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ para todo n en IN

0.75 b) Demostrar que $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ y deducir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

0.5 3) Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ siendo (w_n) la sucesion numerica definida por $w_n = \ln(u_n)$ para todo n en IN

Quinto ejercicio (8 puntos)

I) Consideramos la funcion numerica g definida sobre IR por lo siguiente $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0.5 1) Demostrar que $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ para todo x en IR

0.5 2) Demostrar que la funcion g es creciente sobre $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ y es decreciente sobre $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

0.5 3) a) Demostrar que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ y verificar que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 b)Deducir que $g(x) > 0$ para todo x en IR

II) Sea f la funcion numerica definida sobre IR por lo siguiente : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

y sea (C) la curva representativa de f en un sistema de referencia ortonormal

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm\right)$

1 1)Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y demostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (Recordamos que $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$)

0.75 2)Demostrar que $f'(x) = g(x)$ para todo x en IR y deducir que la funcion f es estrictamente crecirnte sobre IR

0.75 3)a)Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ y deducir que (C) admite una rama parabolica de direccion el eje de ordenadas

0.5 b)Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (x+1)\right]$ y deducir que la recta (Δ) de ecuacion $y = x+1$ es una asintota oblicua a la curva (C) en el entorno de $-\infty$

0.5 c)Determinar el punto de corte de la recta (Δ) y la curva (C) y demostrar que (C) se encuentra

por debajo de la recta (Δ) sobre $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ y por encima de (Δ) sobre $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

0.25 4)a)Demostrar que $y = x$ es una ecuacion de la recta tangente (T) a la curva (C) en el punto O

0.25 b)Demostrar que la curva (C) admite un punto de inflexion de abscisa $-\frac{1}{2}$ (No se pide la determinacion de la ordenada de dicho punto)

0.75 5)Dibujar las rectas (Δ) y (T) y la curva (C) en el sistema de referencia $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 6)a)Utilizando una integracion por partes,demostrar que $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$

0.5 b)Calcular,en cm^2, el area del recinto plano delimitado por la curva (C) y la recta (T) y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 1$