

La dérivabilité

* Le nombre dérivé
 f est dérivable au point $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$
 tel que $l \in \mathbb{R}$

La dérivabilité à droite ou à gauche

* Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \Rightarrow f$ est dérivable à droite au point a et $l = f'_d(a)$

* Si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \Rightarrow f$ est dérivable à gauche au point a et $l = f'_g(a)$

* * Si $f'_d(a) = f'_g(a) \Leftrightarrow f$ est dérivable au point a

L'équation de la tangente

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

L'interprétation graphique

○ (c) admet une demi tangente horizontale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$

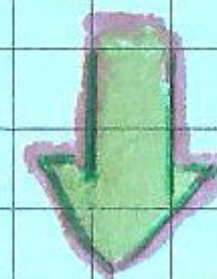
○ (c) admet une demi tangente (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$ de coefficient directeur égal à l

○ (c) admet une demi tangente verticale (à droite / à gauche) au point $M(a, f(a))$
 - orienté vers le haut: si a et ∞ ont le même signe
 - orienté vers le bas: si a et ∞ ont deux signes différents

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$	$\frac{f(a)}{a}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$	l

La dérivée de la fonction réciproque

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I, f(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable sur } J = f(I)$



Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable au point } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable au point } b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Exercice global

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$
 par: $f(x) = x + 10 + 2\sqrt{x-1}$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Etudier la dérivabilité de f à droite au point $a=1$ et interpréter géométriquement ce résultat.
- Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$.
 b. Dresser le tableau de variations.
- Donner l'équation de la tangente au point de l'abscisse $a=2$.
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- Montrer que f^{-1} est dérivable en 14.
 b. Calculer $(f^{-1})'(14)$.

Les branches infinies

* Définition:

On dit que (C) admet une branche infinie lorsque x ou $f(x)$ tend vers l'infini

* Classification des branches infinies

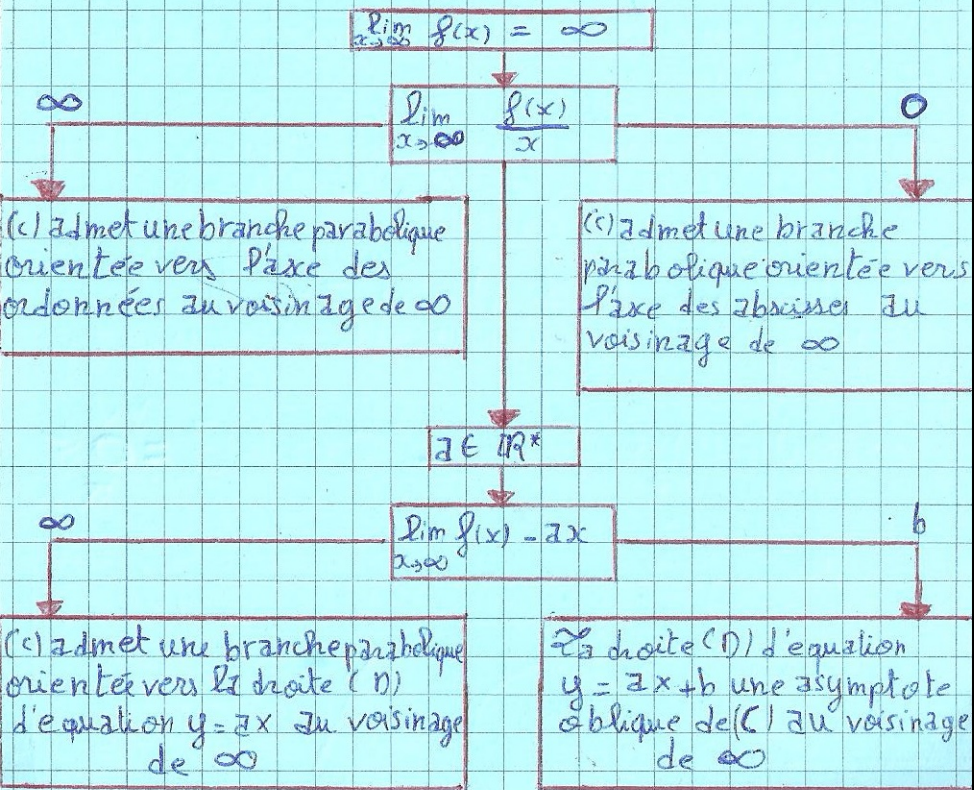
- asymptote verticale

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ alors (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

- asymptote horizontale

si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ alors (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de $+\infty$

- asymptote oblique et les branches paraboliques



II. Concavité de la courbe d'une fonction

Pour étudier la concavité de la courbe d'une fonction on calcule $f''(x)$ et on étudie son signe.

- Si $f'' > 0$ on dit que (C) est convexe
- Si $f'' < 0$ on dit que (C) est concave
- Si f'' s'annule et change son signe au point de l'abscisse a , on dit que $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion

Remarque

Pour déterminer l'intersection entre la courbe (C) et l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$

Exemple à apprendre

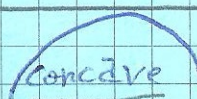
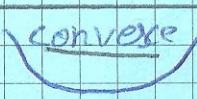
Montrer que (C) admet un point d'inflexion I à déterminer;

puisque f' s'annule et change son signe au point de l'abscisse $a = \dots$ donc (C) admet un point d'inflexion $I(a, f(a))$

montrer que la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de ∞

calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

TABLEAU de concavité

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$	-		+
concavité de (C)	 concave		 convexe