Série des exercices Étude d'une fonction

Exercice 01 :

Soit f une fonction définie comme de suit : $f(x)=x^2+x+\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f et calculer les limites dans ses bornes.
2) Montrer que f est continue sur D_f.
3) Étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$, et donner une interprétation géométrique.
4) Calculer $f'(x)$ $\forall x\in]0;+\infty[$, et donner le tableau de variation de f.
5) Étudier les branches infinies de C_f.
6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie de J vers $I=]0;+\infty[$.
7) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
8) La courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} est la symétrie de C_f par rapport à la droite $(\Delta): y=x$, tracer la droite (Δ) puis la courbe $C_{f^{-1}}$.

Exercice 02 :

On considère la fonction g définie comme de suit : $g(x)=-2x^3+6x+1$

1) Déterminer D_g et calculer les limites dans ses bornes.
2) Montrer que g est continue sur D_g.
3) Étudier les branches infinies de C_g.
4) Calculer $g'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de g et déterminer ses extremums.
5) Montrer que l'équation $g(x)=2$ admet au moins une solution dans l'intervalle [-2 ; 2].
6) Calculer $g''(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de g et donner le tableau de sa concavité.
7) Tracer la courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
8) Déterminer graphiquement, le nombre des solutions de l'équation $g(x)=0$.

Exercice 03 :

Soit la fonction $f: x\rightarrow 2x^4-4x^2+1$

C désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=8x(x^2-1)$

b- Dresser le tableau de variation de f.

3- Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4- Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation: $f(x)=k$.

5- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$, et en déduire les solutions de l'inéquation $f(x)>1$.

Exercice 04 :

Soient la fonction $f: x\rightarrow\sqrt{x^2+2x+3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- a- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b- Vérifier que la droite $(\Delta): x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe C.

2- a- Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$$f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

b- Préciser le sens de variation de f sur $[-1;+\infty[$.

c- Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

d- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3- a- Vérifier que $f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$.

b- En déduire que la droite $D:\ y=x+1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

c- Vérifier que $f(x)-(-x-1)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(-x-1)}$

d- En déduire que la droite $D':\ y=-x-1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

4- Tracer les droites D et D', puis la courbe C .