Axe de symétrie-Centre de symétrie-Point d'inflexion

EL KYAL MOHAMED

➢ Axe de symétrie – Point de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est **un axe de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a - x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a - x\right) = f\left(x\right)$

Le point $I\left(a, b\right)$ est **un point de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

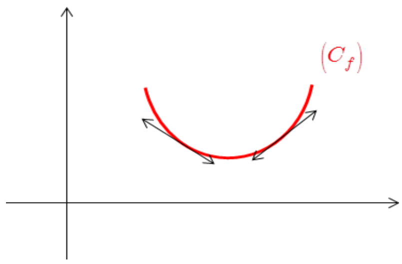
- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a - x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a - x\right) + f\left(x\right) = 2b$

➢ Concavité et point d'inflexion d'une courbe :

Une fonction est ***convexe*** *sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \geq 0$

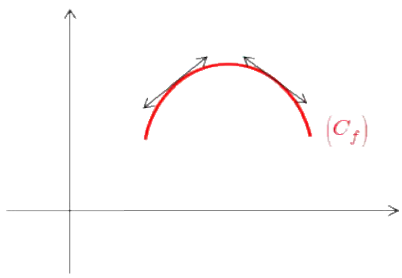
Alors la courbe $\left(C_f\right)$ *est convexe sur l'intervalle* I



Une fonction est ***concave*** *sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \leq 0$

Alors la courbe $\left(C_f\right)$ *est concave sur l'intervalle* I



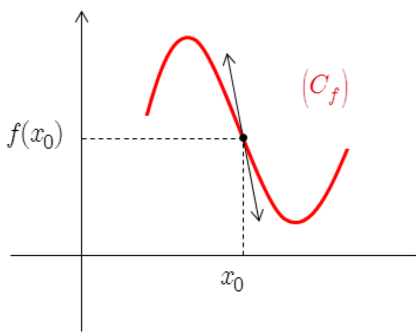
Un ***point d'inflexion*** *d'une courbe* $\left(C_f\right)$ *est le point ou la courbe* $\left(C_f\right)$ *change de concavité en ce point*

Si f'' *s'annule en changeant de signe en* x_0

Alors la courbe $\left(C_f\right)$ *admet un point d'inflexion d'abscisse* x_0

Si f' *s'annule sans changer de signe en* x_0

Alors la courbe $\left(C_f\right)$ *admet un point d'inflexion d'abscisse* x_0



Branches infinies

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$
  - (C_f) admet Une asymptote horizontale d'équation: $y = a$ au voisinage de ∞

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
    - (C_f) admet Une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \underset{(a\neq 0)}{a}$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$
      - (C_f) admet Une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞
    - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$
      - (C_f) admet Une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = ax$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
    - (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
    - (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$
  - (C_f) admet Une asymptote verticale d'équation: $x = a$

- **Propriété :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

alors f admet **une fonction réciproque,** notée f^{-1},définie sur l'intervalle $f\left(I\right)$

et on a : $\begin{cases} f^{-1}\left(x\right)=y \\ x\in f\left(I\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(y\right)=x \\ y\in I \end{cases}$

- **Détermination de l'expression de $f^{-1}\left(x\right)$:**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de $f\left(I\right)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}\left(x\right)=y$

On a : $f^{-1}\left(x\right)=y \Leftrightarrow f\left(y\right)=x$ et en résolvant l'équation $f\left(y\right)=x$ d'inconnue y

On déduit l'expression de $f^{-1}\left(x\right)$ pour tout x de $f\left(I\right)$

- **Continuité de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\left(I\right)$

- **Dérivabilité de la fonction réciproque :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et $y_0=f\left(x_0\right)$

si f est dérivable en x_0 et $f'\left(x_0\right)\neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0

et on a :
$$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I

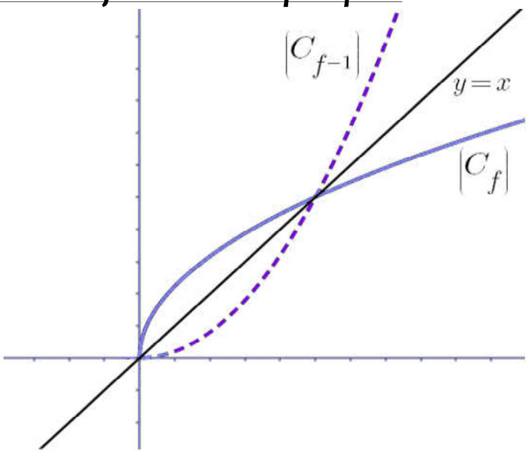
alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(I\right)$ et on a :

$$\forall x\in f\left(I\right) \qquad \left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(x\right)\right]}$$

- ***Monotonie de la fonction réciproque :***

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I   *Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$*   *et varie dans le même sens que f*

- ***La courbe représentative de la fonction réciproque :***



Dans un repère orthonormé $\left(C_{f^{-1}}\right)$ est le symétrique de $\left(C_f\right)$ par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y=x$)

- ***Remarques:***

La courbe $\left(C_f\right)$	$\Rightarrow$ La courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$
$A(a,b)\in\left(C_f\right)$	$A'(b,a)\in\left(C_{f^{-1}}\right)$
admet une asymptote verticale d'équation : $x=a$	*admet une asymptote horizontale d'équation : $y=a$*
admet une asymptote horizontale d'équation : $y=a$	*admet une asymptote verticale d'équation : $x=a$*
admet une asymptote oblique d'équation : $y=ax+b$	*admet une asymptote oblique d'équation : $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$* (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x=ay+b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale	*admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale*
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale	*admet une tangente (ou demi-tangente) verticale*