Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite Un définie par : $U_0 = 1 \quad et\ U_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer par récurrence pout tout n de IN : $U_n < \frac{5}{4}$
3) a-Montrer que $U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}\left(U_n - \frac{5}{4}\right)$

   b-Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente.
4) On suppose que : $V_n = U_n - \frac{5}{4} \qquad \forall n \in IN$

   a- Calculer V_0

   b-Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

   c- Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

   d- Calculer la limite u_n en $+\infty$.

Exercice 02 : 11points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) =$

$$x + \frac{2}{x} + lnx$$

1) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad et\ que \quad \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$ s donner une interprétation géométrique.
2) a- Vérifier que $f(x) = x + \frac{2+xlnx}{x}$ $pour\ tout\ x\ de\ ]0, +\infty[$

   b- Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; donner une interprétation géométrique.
3) a- Calculer $'(x)\ pour\ tout\ x\ de\ ]0, +\infty[$.

   b- Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ et étudier le signe de $(x-1)(x+2)$ sur les deux intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

c- En déduire que f est une fonction décroissante sur intervalle

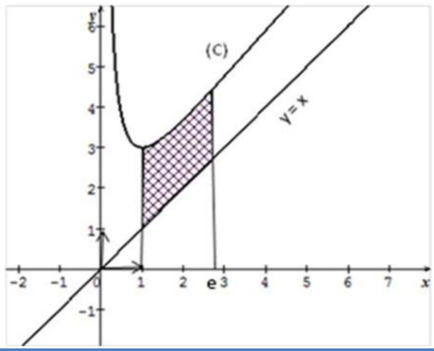
$]0,1]$ et qu'elle est croissante sur $[1,+\infty[$.

d-dresser le tableau de variation de f.

4) a- Vérifier que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$.

b- Etudier le signe de $f''(x)$ *pour tout x de* $]0,+\infty[$ puis en déduire que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.

5) a- En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

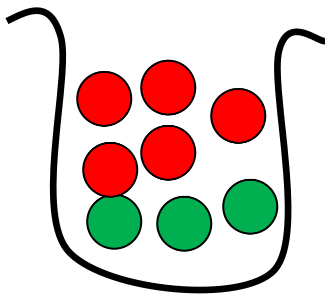


b- En déduire l'aire de la partie hachurée dans la figure.

Exercice 03 : 4.5 points

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et 3 boules vertes

On tire simultanément au hasard deux boules du sac



1) *montrer que le nombre de tirages possibles est : 28*

2) *On considère les événements suivants :*

A: «les deux boules tirées sont de la même couleur»

B «les deux boules tirées sont de couleurs différentes»

3) *montrer que* $p(A) = \frac{13}{28}$

4) *soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules vertes tirées, montrer que* $p(X=0) = \frac{10}{28}$

x_i	*0*	*1*	*2*
$p(X = x_i)$			