

**Exercice 01 : 4,5 points**

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) a- Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .  
 b- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $U_{n+1} - 1 = \frac{u_n-1}{2u_n+3}$  puis montrer par Récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $U_n > 1$ .  
 c- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $U_{n+1} - U_n = 2 \left( \frac{1-u_n^2}{2u_n+3} \right)$   
 d- En déduire que  $U_n$  est une suite décroissante et qu'elle est convergente.
- 2) On suppose que :  $V_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 
  - a. Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $V_n \neq 1$
  - b. Calculer  $V_0$ .
  - c. Montrer que  $V_{n+1} = \frac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$  et en déduire que  $V_n$  une suite géométrique.
  - d. Calculer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) a- Montrer que  $U_n = \frac{1+V_n}{1-V_n}$   
 b- En déduire que  $U_n = \frac{1+\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   
 c- Calculer la limite de  $u_n$  en  $+\infty$ .

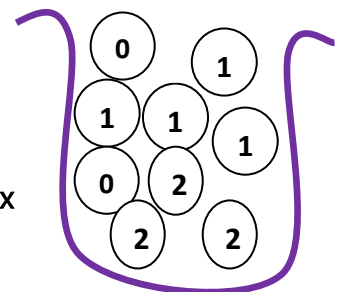
**Exercice 02 : 4,5 points**

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros :

0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2

On tire simultanément au hasard deux boules du sac

- 1) Montrer que le nombre de cas possibles est 36
- 2) Soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées



a- Montrer que

b- Copier et compléter le tableau ci-contre en justifiant les réponses

c- Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable  $X$

$x_i$	0	1	2	4
$p(X = x_i)$				

**Exercice 03 : 1,5 points**

On pose :  $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

- 1) Calculer  $I$  puis Calculer  $I + J$
- 2) En déduire que  $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

**Exercice 04 : 1 0 points**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$$

- 1) a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.  
 b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.  
 c- Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$  puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
- 2) a- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  :  $f'(x) = \frac{(x^2-x+1)}{x^2} e^x$   
 b- Montrer que :  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .  
 c- En le sens de variation de  $f$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $] 0, +\infty[$ .  
 d- Calculer  $f(1)$  puis dresser le tableau de variation sur  $f$ .
- 3) Dans la figure ci- dessous (Cf) est la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(o, i, j)$   
 a- Donner l'équation de la tangente à au point d'abscisse 1 .  
 b- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :  $f(x) = 2$   
 c- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :  $f(x) = -2$

