

**Exercice 01 : 4,5 points**

soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1) calculer  $u_1$  et  $u_2$

2.a) montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n < 15$

2.b) montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 5$

2.c) vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $-\frac{1}{3}u_n + 5 > 0$

2.d) en déduire que  $(u_n)$  est croissante et qu'elle est convergente

3) on pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - 15$

3.a) montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

3.b) calculer  $v_0$  et montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 02 : 4,5 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes. On tire simultanément au hasard trois boules du sac

On considère les événements suivants :

$A$  : «les trois boules tirées sont blanches»

$B$  : «les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux»

$C$  : «il n'y a aucune boule blanche parmi les trois boules tirées»

1.a) montrer que  $p(A) = \frac{1}{56}$

1.b) calculer  $p(B)$  et  $p(C)$

2) soit  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées.

2.a) copier et remplir le tableau ci- contre en justifiant les réponses

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$				

2.b) calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$

**Exercice 03 : 11 points****Partie I**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable

réelle  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  et interpréter géométriquement le résultat

2.a) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2.b) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

2.c) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  et interpréter géométriquement

3.a) montrer que :  $\forall x > 0, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

3.b) calculer  $f(1)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$

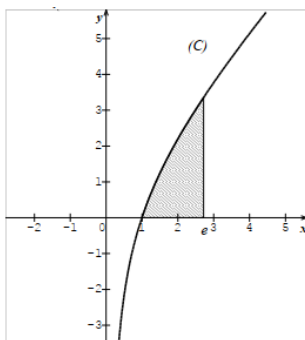
3.c) en déduire le signe de  $f$  sur  $]0; 1]$  et sur  $[1; +\infty[$

3.d) déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  point d'abscisse 1

4) dans la figure  $(C)$  est courbe de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4.a) en utilisant une intégration par parties, m que  $\int_1^e \ln(x) dx = 1$

4.b) montrer que l'aire de la partie hachurée est égale à  $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$  u.a  
(u.a signifie unité d'air)



**Partie II** Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$

1) montrer que  $\forall x > 0, g'(x) = f(x)$

2) en utilisant 3.c de la partie I, montrer que  $g$  est décroissante sur  $]0, 1]$  et croissante sur  $[1, +\infty[$

3.a) que représente la fonction  $g$  pour la fonction  $f$ ? Justifier la réponse

3.b) en déduire, sans calcul, la valeur de  $g(e) - g(1)$  Justifier la réponse