التمرين الأول : (5ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0 = 1$ ولكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$

1) أ- بين بالترجع أن : $0 < u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ 1

ب - ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واستنتج أنها متقاربة 1

2) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{5}{u_n}$

أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = 3$ واستنتج طبيعة المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ 1

ب - اكتب v_n بدلالة n واستنتج أن $u_n = \frac{5}{3n+5}$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ 1

ج - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{5}{u_0} + \frac{5}{u_1} + \cdots + \frac{5}{u_n} = \frac{(n+1)(3n+10)}{2}$ 1

التمرين الثاني : (5ن)

1) احسب التكاملات التالية : 4x0,75

$L = \int_1^2 (2x+1)e^{x^2+x}dx$; $K = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$; $J = \int_{-1}^0 (2x+3)(x^2+3x+1)^{2009}dx$; $I = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

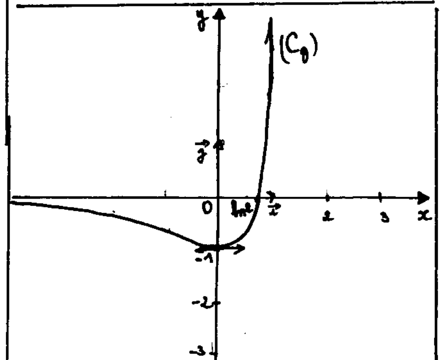
2) أ- تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. 0,25

ب - استنتج أن : $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$ 0,75

ج - باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \frac{1}{4}$ 1

مسألة : (10ن)

I - لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و (C_g) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الشكل جانبه) .



1) احسب : $\lim_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ 0,75

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين : $g'(x) \leq 0$; $g(x) > 0$ 1

3) نفترض أن : $g(x) = ae^{2x} + be^{x} + c$ بحيث a و b و c أعداد حقيقية.

أ- تحقق أن : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = c$ واستنتج (من السؤال 1) أن : $c = 0$. 0,5

ب - باستعمال النقطتين $A(0,-1)$ و $B(\ln 2, 0)$ (من المنحنى (C_g))، بين أن $a = 1$ و $b = -2$ واستنتج تعبيراً لـ $g(x)$. 0,75

4) أ- بين أن : $\int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^{x})dx = -\frac{1}{2}$ 0,75

ب - استنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_g) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x = 0$; $x = \ln 2$ 0,25

II - لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^{x})$

وليكن $(\mathscr{C})$ منحناها الممثل في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 - أ - بين أن الدالة f معرفة على المجال $I =]\ln 2, +\infty[$. 0,5

ب - احسب $\lim_{\substack{x\to\ln 2\\ x>\ln 2}} f(x)$ وأول مبيانيا النتيجة . 1

2 - أ - تحقق أن لكل x من I : $e^{2x} - 2e^{x} = e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$ واستنتج أن : $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$ $(\forall x \in I)$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 1

ب - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$ 0,5

3 - أ - بين أن : $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 2}$ $(\forall x \in I)$ 0,5

ب - استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على I ثم ضع جدول تغيرات f على I 0,75

ج - احسب $f(0,8)$ و $f(0,9)$ واستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها α بحيث : $0,8 < \alpha < 0,9$. 0,75

د - ارسم منحنى الدالة f (نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.) 1