امتحان تجريبي
دورة فبراير 2013
الموضوع

Groupe Scolaire

المادة : الرياضيات
الشعبة : العلوم الاقتصادية
مدة الانجاز ساعتان. المعامل 4

التمرين الأول (5 ن)

1) احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{3x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)\ln x+1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ — 2

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $\ln^2 x-\ln x-2=0$; $(\sqrt{x}-1)\ln(x-2)=0$ — 1,5

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين : $\ln(x+1)-\ln(2x-3)\geq 0$; $\frac{\ln x}{\ln x-1}<0$ — 1,5

التمرين الثاني : (5,5 نقطة)

نعتبر المتتالية الترجعية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي $u_0=3$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n-8}{u_n-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1) أ- تحقق أن كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=5-\frac{3}{u_n-1}$ — 0,25

ب- برهن أن كل n من $\mathbb{N}$: $2<u_n<4$ — 1

2) أ- بين أن كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-2)(4-u_n)}{u_n-1}$ — 0,75

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N})$ $3\leq u_n$ — 0,75

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة. — 0,25

3) نضع كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-4}$

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 3 محددا حدها الأول v_0 — 0,75

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ — 0,5

ج- بين أن كل n من $\mathbb{N}$ $u_n=4+\frac{2}{v_n-1}$ — 0,5

د- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ — 0,75

التمرين الثالث : (9,5 نقطة)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ (علل أجوبتك) — 0,5

ب- احسب $g'(x)$ واستنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ — 0,75

2) أ- احسب $g(1)$ واستنتج أن $\forall x\in]1,+\infty[$ $g(x)>0$ — 0,75

و $\forall x\in]0,1[$ $g(x)<0$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي $f(x)=x+\ln x-\frac{2\ln x}{x}$

وليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ وأول هندسيا هذه النتيجة. — 0,75

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ — 0,75

ج- بين أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ — 0,25

د- تحقق أن كل x من $]0,+\infty[$ $f(x)-x=\frac{(x-2)\ln x}{x}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) (حل المعادلة $(x-2)\ln x=0$) — 1

2) أ- أثبت أن كل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ واحسب $f'(1)$ — 1

ب- بين أن f تزايدية على $[1,+\infty[$ وتناقصية على $]0,1]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+^*$ — 0,75

ج- أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C). — 1

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

أ- بين بالترجع أن $1<u_n<2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ — 0,5

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة. — 1

ج- احسب (معللا جوابك) نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. — 0,5