

6 Les fonctions logarithmes

I La fonction logarithme neperien

Def: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\ln(1) = 0$; $x \in]0, +\infty[$

* Propriétés Algébriques:

- soit a et b deux nombres positifs:
- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
 - $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
 - $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$
 - $\ln(a^n) = n \ln a$
 - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
 - $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$ $e \approx 2,71$
 $\ln(e) = 1$

* Limites de la fonction \ln

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ <small>$n \in \mathbb{N}^*$</small>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

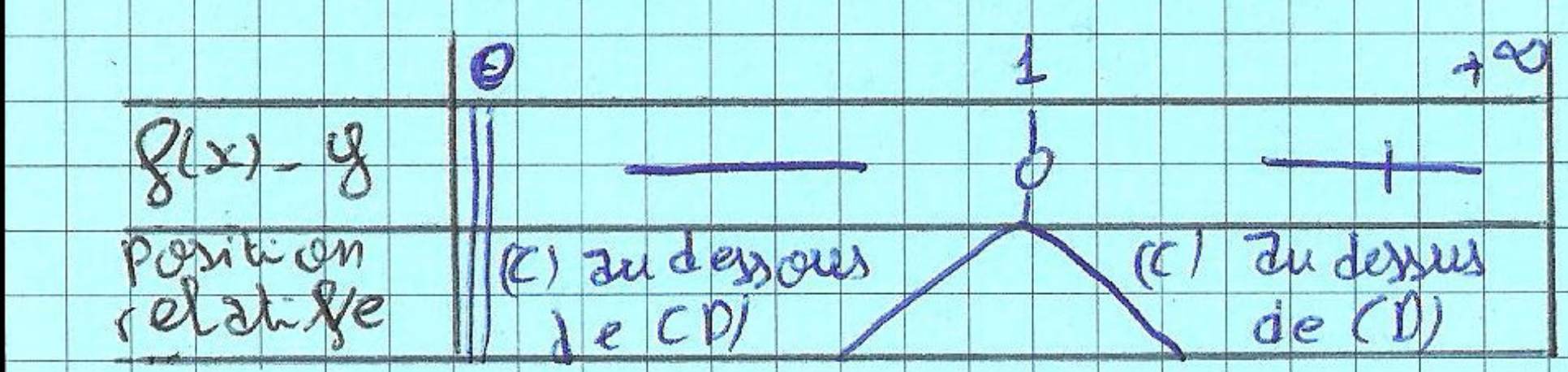
* Étude de signe de la fonction à partir de sa monotonie

monotonie de g	x et a	$g(x)$ et $g(a)$
	$x \leq a$	$g(x) \geq g(a)$
	$x \leq a$	$g(x) \leq g(a)$

* La position relative entre la courbe (C) et la droite (D)

\Rightarrow étudier le signe de $(f(x) - y)$

si: $f(x) - y > 0$: On dit que (C) est dessus de (D)
 si: $f(x) - y < 0$: On dit que (C) est dessous de (D)



* La dérivée de $\ln u(x)$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II fonction logarithme de la base a

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

\Rightarrow si $a \in]0, 1[\Rightarrow (\log_a(x))' < 0$

$\Rightarrow \log_a$ est décroissante

\Rightarrow si $a \in]1, +\infty[\Rightarrow (\log_a(x))' > 0$

$\Rightarrow \log_a$ est croissante

* Propriétés

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$