

**Théorèmes des opérations sur les limites :**

Si  $l \neq 0$  alors :  $l \times \infty = \infty$  et  $\frac{l}{0} = \infty$ .

$\forall l \in \mathbb{R} : \frac{\infty}{l} = \infty ; \frac{l}{\infty} = 0$  et  $\infty \times \infty = \infty$

**Les formes indéterminées :**

$0 \times \infty ; \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; (+\infty) + (-\infty)$

**Exercice 1 :**

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^4 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2}x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^4 + 3x + 1 ; \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 2x + 7 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2)x - 7x^2 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 4x)^2$$

**Exercice 2 :**

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^4 - 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^4 + x^3 - 1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - \sqrt{2}}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{(x^3 - 1)(2x + 6)} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{2x^4 + x^3 - 1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 1)(x^2 - 1)}{x^4 - x^2 + x + 5} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 2x) - 3x^3 + 2}{x^3 + 2x^2 + 1} ;$$

**Exercice 3 :**

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + x - 2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 5x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

**Exercice 4 :**

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{3 - \sqrt{4x+1}}$$

**Exercice 5 :**

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - 2x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} + x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

**Exercice 6 :**

On donne une fonction  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  et telle que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ ,  $0 \leq u(x) \leq x$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 + \frac{u(x)}{x^2}.$$

Montrer que si  $x \geq 1$  ;  $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$ .

Que peut-on en déduire sur la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?

**Exercice 7 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)$$

1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)}{x}$$

a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^* ; g(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} - 1$

puis, vérifier que :  $1 + \sqrt{x^2 + 1} \geq 2$

b) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}^* ; |g(x) + 1| \leq \frac{1}{2}|x|$

c) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

**Exercice 8 :**

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 + 3x + 1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$$9x^2 \leq 9x^2 + 3x + 1 \leq (3x + 1)^2$$

2. En déduire que pour tout réel  $x > 0$  :

$$3 \leq f(x) \leq \frac{3x + 1}{x}$$

3. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$

$f$  est une fonction numérique dont l'expression est :

$$f(x) = ax + \frac{2}{x - b}$$

Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11$$

**Exercice 9 :**

Soit  $n$  est un entier naturel Calculer suivant les valeurs de  $n$ , les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^n - 7x^2 - 2x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (nx^2 - 7x^2 - 2x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^n - 2x^2 + 1}{2x^4 + x^3 - 1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{2x^n + x^3 - 1}$$