# Limites d’une fonction

EL KYAL MOHAMED

## ➢ Limites et inverses des fonctions $x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ :

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ | $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ |

| Si n est un nombre pair alors: | Si n est un nombre impair alors: |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ |
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ | $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ | $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ |

## ➢ Limites des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ / $-\infty$ :

| | |
|---|---|
| *Limite d’une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré* | *Limite d’une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré* |

## ➢ Limites des fonctions de type $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ :

| $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$ |
|---|
| $\ell \geq 0$ |
| $+\infty$ |

$\Longrightarrow$

| $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$ |
|---|
| $\sqrt{\ell}$ |
| $+\infty$ |

*Ces résultats restent valable, à droite en $x_0$, à gauche en $x_0$, en $+\infty$ et en $-\infty$*

## ➢ *Théorème de comparaison :*

$$\left.\begin{array}{l} U(x) \le f(x) \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} U(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|f(x) - \ell\right| \le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le U(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} U(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} U(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} U(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

*Ces résultats restent valable, à droite en* $x_0$, *à gauche en* $x_0$, *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$

## ➢ *Limites et opérations :*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x) + f(x)\right]$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F I |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell < 0$ | | $\ell > 0$ | | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \left[g(x) \times f(x)\right]$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F I |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell < 0$ | | $\ell > 0$ | | $-\infty$ | | $+\infty$ | | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\ell' \ne 0$ | $\pm\infty$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F I | F I |

*Ces résultats restent valable, à droite en* $x_0$, *à gauche en* $x_0$, *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$