

المتتاليات العددية

تعريف ومصطلحات:

$I \subset \mathbb{R}$ كل تطبيق $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ يسمى متتالية عددية نرسم لها U_n

U_n متتالية محدودة،

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq M \Leftrightarrow M \text{ مكبورة بالعدد } \checkmark$$

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq m \Leftrightarrow m \text{ مصفورة بالعدد } \checkmark$$

✓ كل متتالية تزايدية ومكبورة فهي متقاربة.

✓ كل متتالية تناقصية ومصفورة فهي متقاربة.

✓ متقاربة معناها أن U_n تقبل نهاية منتهية

U_n متتالية رتيبة

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow \text{تزايدية} +$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n < 0 \Leftrightarrow \text{تناقصية} +$$

البرهان بالترجع

غالبا ما نستعمل البرهان بالترجع في درس المتتاليات وذلك عند ما نريد أن نبين أن

U_n رتيبة أو محدودة والبرهان بالترجع يعتمد على 3 عناصر أساسية هي :

✓ **التحقق :** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد الأول.

✓ **الافتراض :** نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد n .

✓ **البرهان :** نبرهن أن العبارة تبقى صحيحة بالنسبة للحد $n+1$.

متتالية هندسية - متتالية حسابية .

متتالية هندسية	متتالية حسابية	الأهداف
U_n متتالية هندسية إذا كان $U_{n+1} = qU_n$ يسمى الأساس.	U_n متتالية حسابية أساسها r $U_{n+1} - U_n = r (\forall n \in \mathbb{N})$	تحديد الأساس
ص.ح.ع هي : $U_n = U_0 q^n$ إذا كان الحد الأول هو U_p والأساس هو q فإن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \quad U_n = U_p q^{n-p}$	إذا كان U_0 هو الحد الأول فإن صيغة الحد العام هي : $U_n = U_0 + nr$ إذا كان الحد الأول هو U_p فإن صيغة الحد العام: $U_n = U_p + (n-p)r$	صيغة الحد العام
$U_{n-1} \times U_{n+1} = U_n^2$	إذا كان $U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n$	حدود متتابعة
$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = U_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$	$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$	المجموع

نهايات المتتاليات :

1. توسيع مفهوم النهايات عند الدوال تبقى صحيحا كذلك عند المتتاليات

2. إذا كان $a \leq U_n \leq b$ و U_n متقاربة فإن $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq b$.

3. إذا كان $v_n \leq U_n \leq w_n$: U_n متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a)^n = \begin{cases} +\infty \rightarrow a > 1 \\ 1 \rightarrow a = 1 \\ 0 \rightarrow |a| = 1 \\ \text{rien} \rightarrow a < 1 \end{cases}$$

4. متتالية من نوع $U_{n+1} = f(U_n)$

نعتبر U_n متتالية ترجعيه محدد ب $n \geq n_0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ و U_0 بحيث f دالة متصلة على مجال I ($I \subset \mathbb{R}$) و $f(I) \subset I$. إذا كانت U_n متتالية متقاربة فإن نهايتها هي حل المعادلة : $f(x) = x$