المادة: الرياضيات

ملخص لدرس نهاية متتالية

مستوى:السنة الثانية من سلك البكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

محتوى الدرس	القدرات المنتظرة	المكتسبات السابقة	الامتدادات
❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) $p\geq 3$ و $p\in\mathbb{N}$ ❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\geq 3$ و $p\in\mathbb{N}$ ❖ **نهاية متتالية هندسية:** (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$	استعمال نهاية المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية	○ نهايات الدوال العددية ○ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية ○ المتتاليات من صنف $U_{n+1}=aU_n+b$	دراسة وضعيات متقطعة من مجالات مختلفة

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

تمرين1

]حسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty} x \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 9x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{8}x^4 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} 3x^6 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} 7\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -x \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} -x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} -4x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} -6\sqrt{x}$$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

1. خاصية :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

2. خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية

المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول

الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

III. متتاليات نهايتها عدد

مثال :

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

ملاحظات :

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

IV. نهاية المتتالية (a^n)

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a\succ 1$ فان : (a^n) تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : (a^n) تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1\prec a\prec 1$ فان : (a^n) تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\leq -1$ فان : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة :

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}(-5)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}2^n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n} \quad ,$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(4)^{-n} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(-2)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}n^2-n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$

V. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' و α أعداد حقيقية

العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب:

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

2. المقلوب:

$\lim u_n$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

3. الخارج:

$\lim u_n$	l	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$-\infty$	$l \prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شكل غير محدد	شكل غير محدد

مثال : أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - 2n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : , $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{9n-3}{3n+5}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6n^2-9}{3n+1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$

ملاحظة :

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{3}{4}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4}$

5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+2\\ u_0=-1\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n-\dfrac{8}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\dfrac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
6. بين أن: $v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}=-\dfrac{44}{9}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$
7. بين أن: $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=-\dfrac{44}{9}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)+\dfrac{8}{3}n$