ملخصي وقواعدي في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

ملخص درس نهاية متتالية

❖ **نهاية بعض المتتاليات المرجعية**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

أمثلة: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 3 = 0 + 3 = 3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 = 0 - 7 = -7$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 = 0 + 5 = 5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7} = 0$

ملاحظات :

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

❖ **خاصية:** ليكن a عددا حقيقيا

- ✓ إذا كان : $a > 1$ فان : (a^n) تؤول إلى $+\infty$
- ✓ إذا كان : $a = 1$ فان : (a^n) تؤول إلى 1
- ✓ إذا كان : $-1 < a < 1$ فان : (a^n) تؤول إلى 0
- ✓ إذا كان : $a \le -1$ فان : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5)^n$

أجوبة: : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ لأن: $a = 2 > 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن : $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$(-5)^n$ لأن : ليست لها نهاية لأن: $a = -5 < -1$

❖ **العمليات على النهايات**

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

- **الجمع و الضرب**

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

- **الجمع و الضرب**

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	∞	∞	ش غ م

- **المقلوب و الخارج:**

$\lim u$	l		$l \prec 0$	$l \succ 0$	$-\infty$	$l \prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	ش غ م	ش غ م

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

ملاحظة :

- o نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- o نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

أمثلة: $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 = +\infty$

لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times n = +\infty$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n\times n}{14n\times n\times n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$ الحساب مباشرة

نحصل على شكل غير محدد من قبيل : $+\infty - \infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$