أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية

شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

المادة: الرياضيات

تمارين بحلول في درس نهاية متتالية

تمرين1 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و

$\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}=0$ و

$\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5=-\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6=-\infty$ و

$\lim_{n\to+\infty}2n^9=+\infty$

تمرين2 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$

و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3=0+3=3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7=0-7=-7$ و

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5=0+5=5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

تمرين3 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}2^n$ ، $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ،

$\lim_{n\to+\infty}(-5)^n$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$ و

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن : $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

تمرين4 : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$

و $\lim_{n\to+\infty}3^n-\frac{1}{2^n}$ و $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$ ، $\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن : $-1<a=0.7<1$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و

$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{1}{4}<1$

و $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

تمرين5 : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ 4)

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

5) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n$ 6) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$

أجوبة: 1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$

لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

5) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد

من قبيل: $+\infty-\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n=\lim_{n\to+\infty}n(n-1)=+\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$

و $\lim_{n\to+\infty}n-1=+\infty$ و $+\infty\times+\infty=+\infty$ $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right) = -\infty$ و $+\infty\times-\infty=-\infty$

<u>تمرين6:</u> أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n-3}{3n+5}$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-9}{3n+1}$ 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ 8) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$

<u>أجوبة:</u> 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}} = \dfrac{5}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n^2}=0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 = +\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9 = \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^5 = \infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n-3}{3n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n}{3n} = \dfrac{9}{3} = 3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

5)

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times n = +\infty$$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2}{14n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n\times n}{14n\times n\times n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

<u>تمرين7 :</u> نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 2$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : 5
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

<u>الجواب:</u> 1) نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1} = 5\times u_0 + 8 = 5\times4+8 = 28$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 + 2 = 4+2 = 6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 + 2 = 28+2 = 30$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}+2}{u_n+2} = \dfrac{5u_n+8+2}{u_n+2} = \dfrac{5u_n+10}{u_n+2} = \dfrac{5(u_n+2)}{u_n+2} = 5 = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$

وحدها الأول $v_0 = 6$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول v_0

فان: $v_n = v_0\times q^n$ أي: $v_n = 6\times(5)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

4) لدينا: $v_n = u_n + 2$ اذن: $u_n = v_n - 2$ أي: $u_n = 6\times(5)^n - 2$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n = +\infty$: لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n = 0$

$1 < q = 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n - 2 = +\infty$

<u>تمرين8 :</u> نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \dfrac{8}{3}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\dfrac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

<u>الأجوبة</u> 1) نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1} = \dfrac{1}{4}\times u_0 + 2 = \dfrac{1}{4}\times(-1)+2 = -\dfrac{1}{4}+2 = \dfrac{7}{4}$ اذن : $u_1 = \dfrac{7}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - \dfrac{8}{3} = -1-\dfrac{8}{3} = -\dfrac{11}{3}$

و نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{11}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{19}{3}$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}u_n+2-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{8}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}\left(u_n-\frac{8}{3}\right)}{u_n-\frac{8}{3}} = \dfrac{1}{4} = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{4} = q$

وحدها الأول $v_0 = -\dfrac{11}{3}$

3) كتابة v_n بدلالة n :بما أن المتتالية (v_n) هندسية

أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 فان: $v_n=v_0\times q^n$

أي: $v_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n لدينا: $v_n=u_n-\frac{8}{3}$ اذن: $v_n+\frac{8}{3}=u_n$

أي: $u_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

$-1<a=\frac{1}{4}<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

تمرين9 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+5 \\ u_0=4 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة

كالتالي : $v_n=u_n-10$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0+5=\frac{1}{2}\times4+5=2+5=7$ اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1+5=\frac{1}{2}\times7+5=\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{17}{2}$

اذن : $u_2=\frac{17}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-10=4-10=-6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-10=7-10=-3$

2)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n+5-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-5}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-\frac{10}{2}}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}(u_n-10)}{u_n-10}=\frac{1}{2}=q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$v_0=-6$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=-6$ فان: $v_n=(-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n=u_n-10$

اذن: $v_n+10=u_n$ أي: $u_n=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+10$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ولأن $-1<a=\frac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+10=0+10=10$