Prof : IDRISSI Abdessamad

Calcul Intégral (série n°1)

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$a=\int_1^2\left(x^2+2x+3\right)dx$;; $b=\int_0^1\left(x^5-6x\right)dx$;; $c=\int_1^2\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}dx$;; $d=\int_0^1(x+3)\left(x^2+6x+1\right)^3dx$.

$e=\int_0^1\left(x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;; $f=\int_{-1}^2\left|x^2-1\right|dx$;; $g=\int_1^2\frac{x^2-2x}{\sqrt{3x^2-x^3}}dx$;; $h=\int_2^3\frac{\left|x^2-1\right|}{x^3-3x}dx$.

$i=\int_{-1}^1\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$;; $j=\int_{\frac{1}{e}}^e\frac{\left|\ln x\right|}{x}dx$;; $k=\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;; $l=\int_1^2\frac{x^2+x+2}{x^3+2x^2}dx$;; $m=\int_3^8\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

$n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2dx$;; $o=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^3dx$;; $p=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\cos x}dx$.

Exercice 2 :

En utilisant une intégration par parties ; Calculer les intégrales suivantes :

$a=\int_{\frac{1}{e}}^{e^2}\ln x\,dx$;; $b=\int_{\sqrt{e}}^{e}x^5\ln x\,dx$;; $c=\int_0^1x^3e^{x^2}dx$;; $d=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

$e=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cos 3x\,dx$;; $f=\int_0^{\pi}2x\cos^2(x)dx$;; $g=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\ln(1+\cos x)dx$.

Exercice 3 :

On considère les deux intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

① - *Calculer et I-J.*

② - *Calculer I +J.*

③ - *En déduire la valeur de I et J.*

Exercice 4 :

On considère les deux intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$.

① - *Calculer J.*

② - *Calculer I-J.*

③ - *En déduire la valeur de I.*

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par: $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ avec $t\in[1;2]$.

① - *Vérifier que : pour tout* $1\le t\le x\le 2$ *on a :* $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le f(t)\le\frac{1}{\sqrt{2}}$.

②- En déduire que : $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq F(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$. Tel que $F(x)$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en 1 .

③ - Soit $g(x)$ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;x]$.

Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par: $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$.

①- Calculer les intégrales : $I=\int_1^e \frac{dx}{x}$ et $J=\int_1^e \ln x dx$.

②- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

③ - Montrer que : $G(x)=x\left[(\ln x)^2-2\ln x+2\right]$ est une fonction primitive de la fonction $g(x)=(\ln x)^2$.

④ - Soit $t\in]0;1[$.

a – Calculer les intégrales : $A=\int_t^1 \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$ et $B=\int_t^1 (\ln x)^2 dx$.

b – Calculer en fonction de t le volume $V(t)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[t;1]$.

c – Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx$ et $u_0=\int_1^e x\ln x dx$.

① - En utilisant une integration par partie, Calculer u_0 .

② - En utilisant une integration par partie, Calculer u_1 .

③ - Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n\geq 0$.

④- Montrer que (u_n) est une suite décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

⑤ - En utilisant une integration par partie,

Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $2u_{n+1}+(n+2)u_n=e^2$

⑥ - a – Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n\leq\frac{e^2}{n+2}$.

b – En déduire la limite de la suite (u_n).