

## DENOMBREMENT

**Dénombrer**, c'est compter des objets.

### I. Ensemble fini : introduction

1) Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble **fini** et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note :

$$\text{Card}(E) = n$$

Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

2) L'ensemble vide, noté  $\emptyset$  est un ensemble de cardinal 0 :  $\text{card}\emptyset = 0$

**Propositions** : Soient E et F deux ensembles finis

$$1) \text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

2) Si E et F sont disjoints ( $E \cap F = \emptyset$ ) alors :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$$

Si  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille d'ensembles disjoints deux à deux

( $X_i \cap X_j = \emptyset$  si  $(i \neq j)$ ) alors :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \text{card}(X_i)$$

3) Si  $E \subseteq F$  alors :  $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$  et

$$\text{card}(F - E) = \text{card}(C_F^E) = \text{card}(F) - \text{card}(E)$$

### II. Théorème fondamental du dénombrement

Si un événement  $C_1$  peut se produire de  $n_1$  façons différentes

et un événement  $C_2$  peut se produire de  $n_2$  façons différentes et ... et un événement  $C_p$  peut se produire de  $n_p$  façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

**Alors** : Le total n des possibilités de l'événement combiné  $C_1, C_2, \dots, C_p$  est le produit des possibilités de chaque événement. Cad :  $n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_p$

**Propositions** : Soient A et B deux ensembles finis et non vides :  $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$

### III. le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soient M et N deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de N dans M est :

$$(\text{card}M)^{\text{card}N} = m^n \text{ avec : } \text{card}M = m \text{ et } \text{card}N = n$$

### IV. L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et non vide et  $\text{card}E = n \quad n \in \mathbb{N}$

et soit  $P(E)$  l'ensembles des parties de E on a :

$$\text{card}P(E) = 2^n$$

### V. Arrangements

**1) Définition** : Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E C'est-à-dire : un élément de la forme :

$$(x_1; x_2; \dots; x_p) \in E \times E \times \dots \times E = E^p$$

et dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

### 2) Arrangements avec répétitions

**2-1 Définition** : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts. On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E.

### 2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à  $n^p$ .

### 3) Arrangements sans répétitions

**3-1 Définition** : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

### 3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note :  $A_n^p$  et est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

### VI. Permutations

#### 1) permutations sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.  $n \in \mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n!** (*factorielle n*) défini par

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

#### 2) permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont

Identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls k éléments sont distincts ( $k \leq n$ ), chacun d'eux apparaissant  $n_1, n_2, \dots, n_k$  fois, avec

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \text{ et } n_i \geq 1, \text{ on a :}$$

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \quad (P_n \text{ permutations avec répétitions})$$

## VII. Combinaisons

**1 Définition :** Soit E un ensemble non vide de n éléments ( $n \neq 0$ ) :

Et un entier  $p : 0 \leq p \leq n$

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E.

**Remarque :** « combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.

(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments

**2 Propriété :** Quels que soient les entiers naturels n et p tels que  $0 \leq p \leq n$  on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n

éléments est le nombre que l'on note par :  $C_n^p$  et on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \text{ et on a aussi : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^0 = 1 ; C_n^1 = n ; C_n^n = 1$$

• Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :

$$C_n^0 = 1 \text{ (L'ensemble vide)}$$

• Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est :  $C_n^1 = n$  (les singletons)

• Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est :  $C_n^n = 1$  (L'ensemble E)

**3) Propriétés :** Quels que soient les entiers naturels n et p tels que  $0 \leq p \leq n$  on a :

$$1) C_n^p = C_n^{n-p} \quad 2) C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

### Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau est appelé le Triangle de Pascal.

## VIII. Formule du binôme de Newton

**Proposition :**  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

### Synthèse :

Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1) L'ordre des éléments est-il important ?

- Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.
- Si non il s'agit de combinaisons.

2) Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

- Si non il s'agit d'arrangements.
- Si oui il s'agit de permutations.

3) Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces

