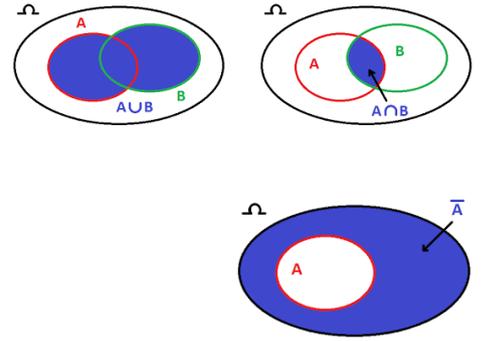


Dénombrement

I) Cardinal d'un ensemble fini - Parties d'un ensemble.

- Soit Ω un ensemble fini de n éléments, $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.
L'entier naturel n est appelé **cardinal** de Ω . On note : $\text{card}\Omega = n$
- A et B désignent deux parties de Ω . On écrit : $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.
- Si A et B sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$
- $\bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A .
- $\bar{\bar{A}} = A$ et $\bar{A} \cap A = \emptyset$
- $\text{card} \bar{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A$



II) Principe de produit ou principe fondamental de dénombrement.

- **arbre de choix**
- **Principe de produit** : Si une expérimentation complexe peut se décomposer en p opérations élémentaires successives tels que :
 - La **première** opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
 - La **deuxième** opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
 - La **troisième** opération peut être effectuée de n_3 manières différentes. Et ainsi de suite ...
 - La $p^{\text{ième}}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$ manières différentes

III) Arrangements et permutation d'un ensemble fini.

• Arrangements sans répétitions.

- **Notion de factorielle** : Soit n un entier naturel tel que $n > 1$

On appelle " n factorielle " le nombre entier noté $n!$ tel que $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention, on pose $0! = 1$ et $1! = 1$.

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **arrangement** de p éléments de Ω , toute suite de p éléments **distincts** de Ω . On le note A_n^p .

Il y a n façons de choisir le 1^{er} élément, $(n-1)$ façons de choisir le 2^{ème} élément, ..., $[n-(p-1)]$ façons de choisir le $p^{\text{ème}}$. et d'après le principe

$$\text{Donc } A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si } p \leq n.$$

$$A_n^0 = 1; A_n^1 = n; A_n^n = n!$$

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **permutation**, tout arrangement des n éléments de Ω .
Il y a $n!$ permutations de Ω si les n éléments sont distinguables entre eux.

• Arrangements avec répétitions.

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est n^p

N. B. : Quand il s'agit de classer k « objets », rangés en p groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de p objets quand k_1 sont d'une sorte, k_2 d'une autre, ..., k_p de la $p^{\text{ème}}$ sorte, avec $k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$.

$$\text{Ce nombre est alors : } \frac{k!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_p!}.$$

IV) Combinaisons d'un ensemble fini .

Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **combinaison** de p éléments de Ω , toute partie de p éléments de Ω . On la note C_n^p telle que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ / $1 \leq p \leq n$.

Formules usuelles : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (\text{formule de Pascal}) \quad ; \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (\text{formule du binôme})$$

V) Types de tirages.

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de p boules d'une urne qui en contient n .
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
 - 1) L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
 - 2) La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

Ω étant un ensemble à n éléments, On tire p éléments parmi n éléments, donc :

Type de tirage	Ordre	Répétition	Nombre de tirages possibles
Successif avec remise	Pas important	Possible	n^p
Successif sans remise	Important	Impossible	A_n^p $p \leq n$
Simultané	Important	Impossible	C_n^p $p \leq n$