I. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 – dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0 :

A. Dérivabilité :

a. Définitions :

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R}\right)$ $\ell = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.
- f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R}\right)$ $\ell_d = f_d'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0.
- f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R}\right)$ $\ell_g = f_g'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0.

b. Propriété :

Soit une fonction f .
f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

B. interprétation géométrique des nombres dérivées $f'(x_0)$ et $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$

a. Interprétation géométrique du nombre dérivée $f'(x_0)$:

- f est une fonction dérivable au point x_0.
- (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❖ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0,f(x_0))$ (le point x_0).

❖ Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0,f(x_0))$ est $(T): y = (x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$.

❖ Si $f'(x) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse .

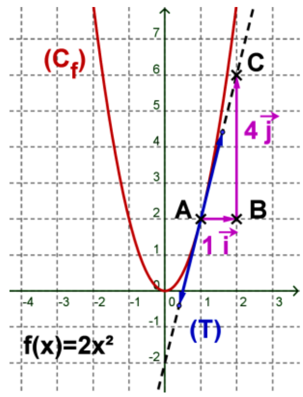
b. Exemple :

1. Trouver équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $x_0 = 1$ avec $f(x) = 2x^2$.

L'équation est $(T): y = (x-1)f'(1)+f(1)$ ou $(T): y = (x-1)\times 4+2$.

D'où le coefficient directeur est $m=4$ et vecteur directeur est : $\vec{u}(1,4)=1\vec{i}+4\vec{j}$

A partir du point $A(1,f(1))$ avec $f(1)=2$



- On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB}=1\vec{i}$ et on construit le point C tel que : $\overrightarrow{BC}=4\vec{j}$.
- D'où la droite (AC) est la tangente (T) à (C_f) au point A.
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est A.

c. Interprétation géométrique des nombres dérivées $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$:

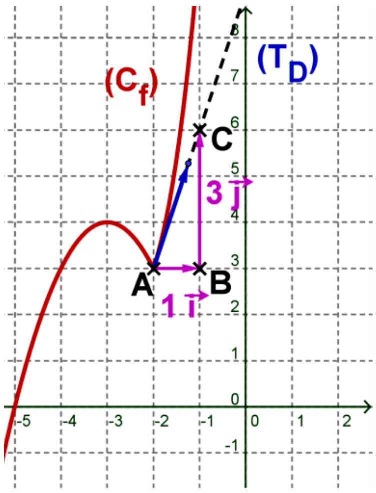
- Si f est dérivable à droite de x_0 on a une demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f_d'(x_0)$.
- équation du demi tangente à droite de $-x_0$ est $(T_d): y=(x-x_0)f_d'(x_0)+f(x_0)$ avec $x\geq x_0$.
- Si f est dérivable à gauche de x_0 on aune demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f_g'(x_0)$.
- équation du demi tangente à gauche de $-x_0$ est $(T_g): y=(x-x_0)f_g'(x_0)+f(x_0)$ avec $x\leq x_0$.
- Si $f_d'(x_0)\neq f_g'(x_0)$ donc f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0,f(x_0))$ est appelé point anguleux.

d. Exemple :

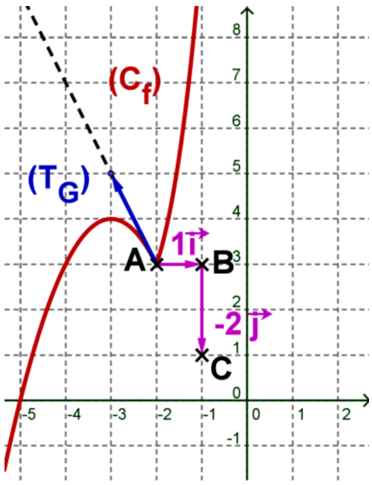
soit $\begin{cases} f(x)=(x+3)^3+2 & ;x\geq -2 \\ f(x)=-(x+3)^2+4 & ;x<-2 \end{cases}$ on a $f'_d(-2)=3$ et $f'_g(-2)=-2$

- équation du demi tangente à droite de -2 est $(T_d): y=(x+2)f_d'(-2)+f(-2)$ avec $x\geq x_0$.
- équation du demi tangente à gauche de -2 est $(T_g): y=(x+2)f_g'(-2)+f(-2)$ avec $x\leq x_0$.

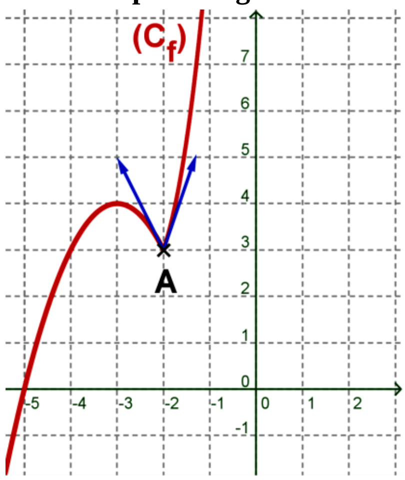
Demi tangente à droite de -2



Demi tangente à gauche de -2



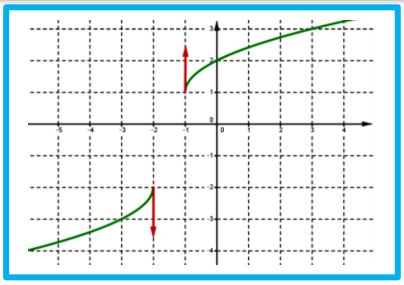
Demi tangente en -2 le point $A(-2,3)$ est un point anguleux



e. Remarque :

- si f n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées
- si f n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées .

f. Exemple : exemple $f(x)=\sqrt{(x+1)(x+2)}$.



- à droite de $x_0=1$ on a : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\infty$. donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à droite du point $M(1,f(1))$

à gauche de $x_0=-1$ on a : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=f(-1)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}=\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\infty$. donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à gauche du point $M(-1,f(-1))$

g. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .

II. Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée première – dérivée seconde –dérivée $n^{ième}$ d'une fonction :

A. Dérivabilité sur un intervalle :

a. Définition :

- f est une fonction dérivable sur $I=]a;b[$ si et seulement si f est d dérivable en tout point x_0 de I .
- f est une fonction dérivable sur $[a;b[$ si et seulement si f est d dérivable sur $I=]a;b[$ et f est dérivable à droite du point a .
- f est dérivable sur $]a,b] \Leftrightarrow$ f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche de b
- f est dérivable sur $[a,b] \Leftrightarrow$ f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b .

B. La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée $n^{ième}$ d' une fonction:

a. Définition :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on note : $g=f'$. Ou encore $\begin{array}{l} g:I\to\mathbb{R} \\ x\to g(x)=f'(x)\end{array}$ g s'appelle la fonction dérivée de f on note : $g=f'$.
- La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$
- En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$) et on note $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

III. Les opérations sur les fonctions dérivables :

a. Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x)=\alpha f'(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
- La fonction $f\times g$ est dérivable sur I et $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I $\forall x\in I, g(x)\neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I $\forall x\in I, g(x)\neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

IV. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $f^n(x)$ - fonctions trigonométriques :

a. Propriété :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}$ et $(ax^n)'=nax^{n-1}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .
- f est une fonction dérivable sur un intervalle I .
  - ✓ La fonction f^n avec $n\in\mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a : $(f^n)'(x)=nf^{n-1}(x)f'(x)$.
  - ✓ Si pour tout x de I ; $f(x)\neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p\in\mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x)=pf^{p-1}(x)f'(x)$.
- La fonction $f(x)=\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=(\cos(x))'=-\sin(x)$.
- La fonction $f(x)=\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=(\sin(x))'=\cos(x)$.
- La fonction $f(x)=\tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ avec $f'(x)=(\tan(x))'=1+\tan^2(x)$ ou encore $f'(x)=(\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

b. Exemple : Calculer : $g'(x)$ pour $g(x)=\left(-2x^4+5x^2+x-3\right)^7$.

On a : $g'(x)=\left[(-2x^4+x-3)^7\right]'$.

$$=7\left(-2x^4+x-3\right)^6\left(-2x^4+x-3\right)'$$

$$=7\left(-2x^4+x-3\right)^6\left(-8x^3+1\right)$$

VII. Dérivabilité de la composée de deux fonctions :

a. Théorème :

f dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

b. Application :

- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2 \times \sqrt{f(x)}}$; $x \in D_{f'}$ et $f(x) > 0$.
- $(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b)$; sur $\mathbb{R}$.
- $(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b)$; sur $\mathbb{R}$.
- $(\tan(ax+b))' = a \times \left[1 + \tan^2(ax+b)\right] = a \times \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$ avec $ax+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

V. La fonction dérivée de la fonction réciproque :

a. Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et $f(I) = J$), f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction ($(x_0 \in I)$; $x_0 \mapsto f(x_0) = y_0$; $(y_0 \in J)$)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ f(x_0) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

ou encore $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

b. Applications :

$n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$ et f est une fonction strictement positive et dérivable sur I	
$g'(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left((x)^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
$g'(x) = (x^r)' = rx^{r-1}$; $r \in \mathbb{Q}^*$	$\left([f(x)]^r\right)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1}$; $r \in \mathbb{Q}^*$

c. Exemple :

1. Calculer la fonction dérivée f' de f .

$f(x) = \sqrt[5]{x}$ et $f(x) = \sqrt[5]{x^2+1}$ et $f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)^7}$

On a :

- $f'(x)=\left[\sqrt[5]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.
- $f'(x)=\left[\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}$.
- $f'(x)=\left[\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^7}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$

VI. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
؛ $f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g / g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'} / g(x)>0$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$

VI. Applications de la fonction dérivée première :

Remarque :

- dans le reste de ce chapitre f est une fonction numérique de la variable réelle x.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A. La monotonie d’une fonction et le signe de sa fonction dérivée :

a. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I alors la fonction f est strictement croissante sur I. (même si f' s’annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I alors la fonction f est strictement décroissante sur I. (même si f' s’annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction f' est nulle sur I (sur I tout entier) alors f est constante.

b. Exemple :

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ avec $f(x)=(2x+4)^2$.

- On calcule : f'.

$$f'(x)=\left[(2x+4)^2\right]'$$

$$=2(2x+4)'(2x+4)=2\times 2(2x+4)=8x+16$$

- Signe de f' :

On a $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 8x+16\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -2$

Donc : f' est positive sur $[-2,+\infty[$ et négative sur $]-\infty,-2]$.

- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

B. Extremums d’une fonction dérivable :

a. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I, a est un élément de I.

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a)=0$.

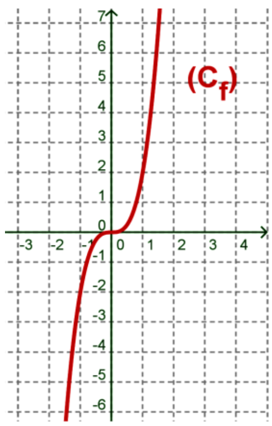
Remarque : Si $f'(a)=0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f.

b. Exemple :

$f(x)=2x^3$ on a $f'(x)=6x^2$ d’où $f'(0)=0$ mais $f(0)$ n’ est pas un extremum de la fonction f.

La fonction

$f(x)=2x^3$



c. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f

VII. Applications de la fonction dérivée deuxième :

A. Position relative de la tangente et la courbe – la concavité :

a. Propriété et définition :

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .
$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives . on note $\smile$

$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

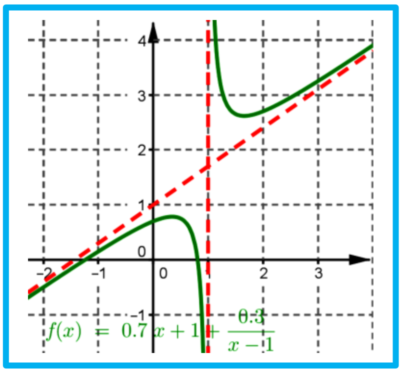
- La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes des $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives . on note $\frown$.

b. Exemple :

Exemple 1 :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f .



- Sur l'intervalle $]1,+\infty[$: la courbe (C_f) de f est convexe .
(ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives) .
- Sur l'intervalle $]-\infty,1[$: la courbe (C_f) de f est concave .
(ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives) .

Exemple 2 :

Le tableau ci-contre représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$ ‖ $-$	0	$+$
Concavité de (C_f)	$\frown$		$\smile$ ‖ $\frown$		$\smile$

B. Points d'inflexions :

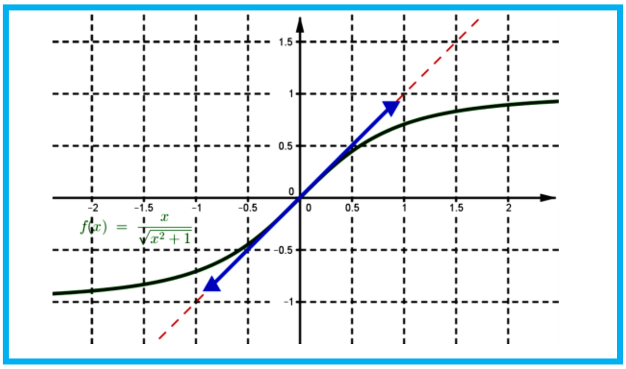
a. Propriété et définition :

f est une fonction dérivable deux fois sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d' inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.

b. Exemple :

Exemple 1 :

- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exemple 2 :

Le tableau suivant représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$ -5	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0	$+$	$-$ 0	$-$
Concavité de (C_f)	∩	∪	∩	∩

- Le point d'abscisse $x_0 = -5$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car $f''(-5) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de $x_0 = -5$.
- Le point d'abscisse $x_1 = 2$ n'est pas un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car f'' change de signe au voisinage de $x_1 = 2$

VIII. Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

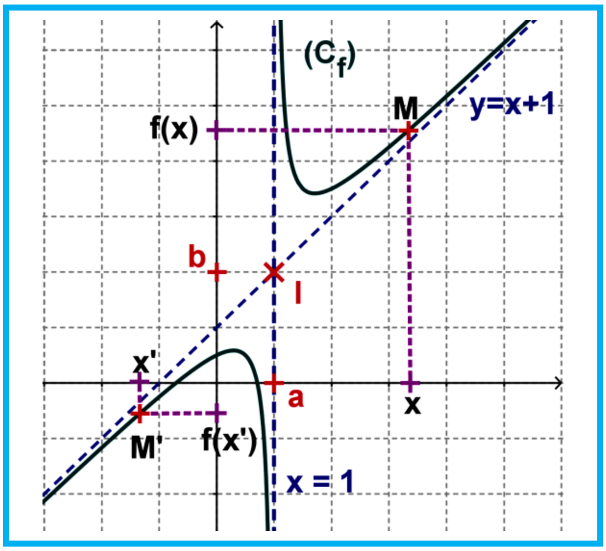
A. Centre de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie au courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \; ; \; f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

b. **Exemple :**



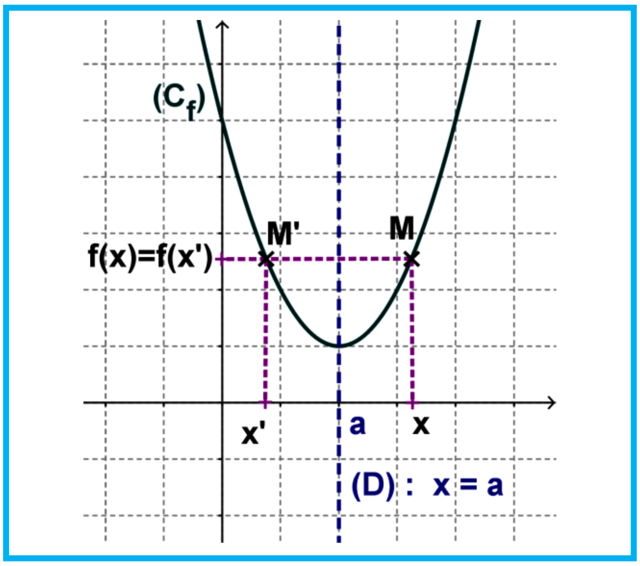
B. axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. **Propriété :**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La droite d'équation $D: x = a$ est axe de symétrie au courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \;;\; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \;;\; f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

b. **Exemple :**



IX. Branches infinies d'une fonction :

A. Branches infinies :

a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de (C_f) tend vers l'infinie on dit que la courbe (C_f) admet une branche infinie .

B. Asymptote verticale :

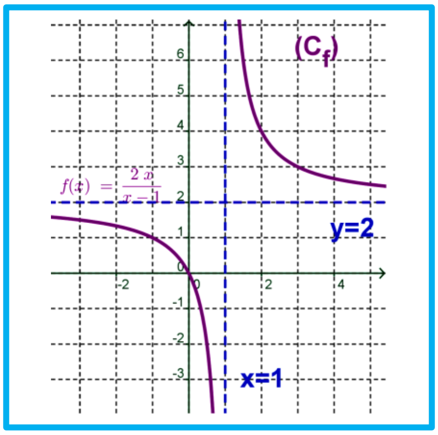
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à (C_f) (à droite de a ou à gauche de a) .

b. Exemple :

Exemple : asymptote verticale d'équation $x=1$.



C. Asymptote horizontale

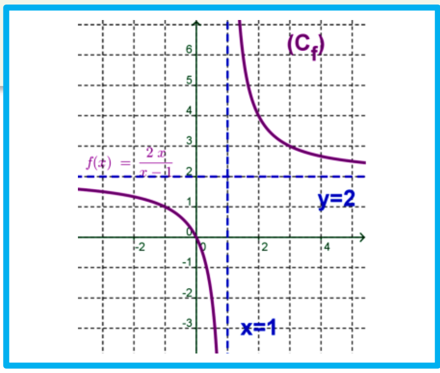
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $\left([a,+\infty[\subset D_f \text{ ou }]-\infty,a[\subset D_f\right)$ dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$) alors la droite d'équation $y=b$ (ou $y=c$)est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

b. Exemple :

Asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $\pm\infty$.



D. Asymptote oblique :

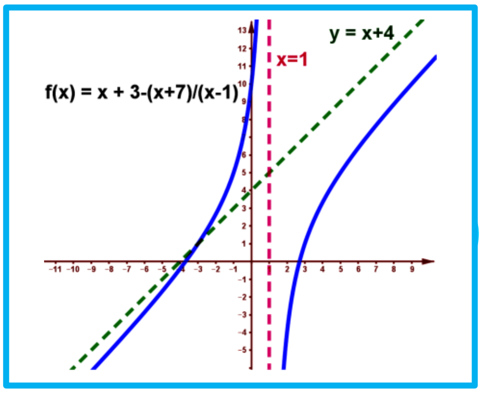
a. Définition :

- Soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $\left([a,+\infty[\subset D_f \text{ ou }]-\infty,a[\subset D_f\right)$ dans un plan (P) est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
- $a\in\mathbb{R}^*$ ($a\neq 0$ et $a\neq\pm\infty$) et $b\in\mathbb{R}$

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ au voisinage de $\pm\infty$.

b. Exemple :

Soit $f(x)=x+3-\dfrac{(x+7)}{(x-1)}$.



$\left(C_f\right)$ admet une asymptote oblique la droite d'équation $y=x+3$ voisinage de $\pm\infty$

c. Propriété :

Si la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ au voisinage de $\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

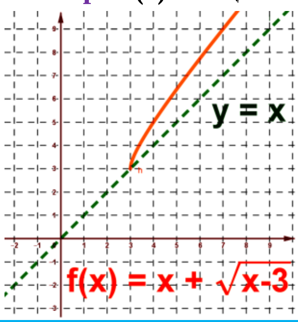
- Pour déterminer a on calcule : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ (c.à.d. $a\neq 0$ et $a\neq\pm\infty$) , donc on a deux cas particulières .
- Pour déterminer a on calcule : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\in\mathbb{R}$ (c.à.d. $b\neq\pm\infty$) . donc on a la troisième cas particulière .
- Les cas particulières
  - 1ère cas particulière : $a=\pm\infty$ on dit que $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des ordonnés .
  - 2ième cas particulière : $a=0$ on dit que $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des abscisses .
  - 3ième cas particulière : $b=\pm\infty$ avec $a\in\mathbb{R}^*$, on dit que $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique de direction (B.P.D) la droite d'équation $y=ax$.

les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

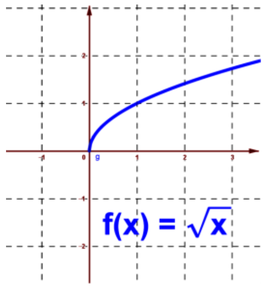
Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

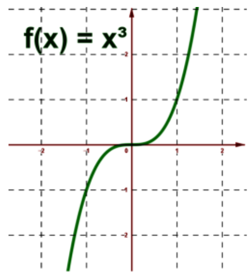
Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnés

Exemple $f(x) = x^3$



X. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .(complément)

a. Définition :

f est une fonction dérivable au point a

- La fonction u tel que : $u : x \to f(a) + (x-a)f'(a)$ (ou encore $(x - a = h)$; $v : h \to f(a) + hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .
- Quand x est très proche de a le nombre $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a) + hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ avec $x - a = h$.

C. Exemple :

❖ **Exemple 1 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x) = x^2$ et $a = 1$.

Correction :

f est une fonction dérivable au point 1 avec $f'(1) = 2$ approximation affine de $f(1+h)$ est :

$f(1+h) \approx hf'(1) + f(1) \approx 2h + 1$.

Conclusion : $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 2h + 1$.

Application du résultat :

On prend $h = 0,001$ d'où : $f(1,001) = f(1 + 0,001) \approx 2 \times 0,001 + 1$ donc $f(1 + 0,001) \approx 1,002$.

On vérifie : $f(1,001) = (1,001)^2 = 1,002001$ donc $1,002 \approx 1,002001$.

Technique de calcule : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h+1$.

❖ **Exemple 2 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

   Correction :

   On pose $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=9$ et $h=0,002$ d'où $\sqrt{9,002}=f(9+0,002)$.

   On calcule le nombre dérivé de f en 9 on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(9+h)-f(9)}{h}=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-3\right)}\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{1}}{\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$$

D'où : f est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est $f'(9)=\frac{1}{6}$.

On trouve une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

On a : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ d'où $f(9+0,002)\approx f(9)+0,002\times f'(9)$.

Donc : $f(9+0,002)\approx\sqrt{9}+0,002\times\frac{1}{6}$ par suite $f(9+0,002)\approx 3,000333333$.

On remarque que $\sqrt{9,002}\approx 3,000333333$ la calculatrice donne : $\sqrt{9,002}\approx 3,000333315$ d'où la précision est 3×10^{-8} .

I. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x)=x^2$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^2\approx 1+2h$.
- Pour la fonction : $f(x)=x^3$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^3\approx 1+3h$.
- Pour la fonction : $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\frac{1}{1+h}\approx 1-h$.

XI. Résumer des branches infinies :

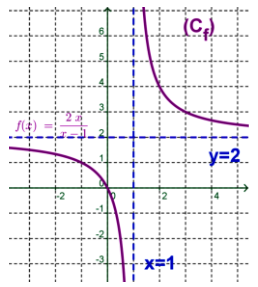
Les branches infinies

Asymptote horizontale

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$



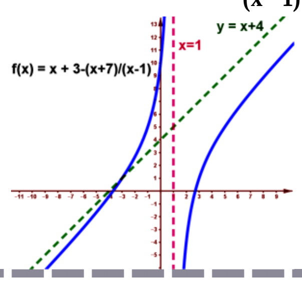
Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation y=ax+b voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$



Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

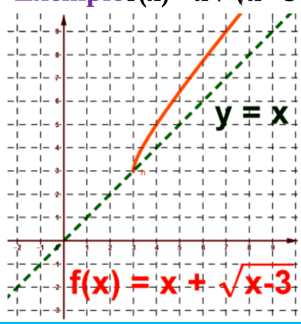
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$

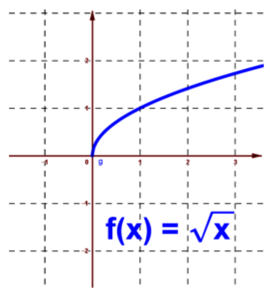


$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$

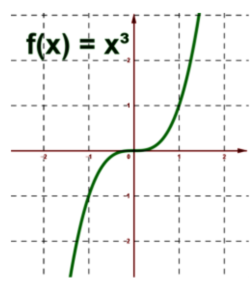


$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnés

Exemple $f(x) = x^3$



les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

Asymptote verticale

$\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$