Cours : *LA DERIVATION Avec* **Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC BIOF

LA DERIVATION

I)RAPPELLES

1) DERIVATION EN UN POINT

Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x)=x^2+x-3$ *est dérivable en* a *= -2.*

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \ldots x\geq 1 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}\ldots x\prec 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x; x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x; x\geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$

Solution :

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}x-1=-3=f'(-2)$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

on a $f(1)=\sqrt{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}==\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=f'_d(1)$

Donc f est dérivable à droite en 1

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{1}{2}=f'_g(1)$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1)=f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-2x+3=3=f'_d(0)$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}3x+1=1=f'_g(0)$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}\ldots 0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x}\ldots x\succ 1 \end{cases}$$

1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique

Solution :1) $x\in D_f \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$ et $0\leq x\leq 1$

ou $x^3-x\geq 0$ et $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ ou $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in[0;+\infty[$ donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

On a : $f(0)=1$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2}+1)}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'_d(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(0, 1).de coefficient directeur $1=f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ On a : $f(1)=0$ soit $0\leq x\leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^-}-(1+x)^2=-4$

Alors : $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$

b)soit $x\succ 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1}=\frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^3-x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x=2$

Alors : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0=1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice3 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=|x^2-1|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$

Solution :1) $f(x)=|x^2-1|$

étude du signe de : x^2-1

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1 ou x=1$

Donc : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1]\end{cases}$ et

$f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x+1=2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=1$ et $f'_d(1)=2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1)=2$

2)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=1$ et $f'_g(1)=-2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f'_g(1)=-2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0=1$ car : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(1, 0).

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$ est :

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$ est :

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$y=f(1)+f'_g(1)(x-1)\Leftrightarrow y=0-2(x-1)\Leftrightarrow(\Delta_g):y=-2x+2$

2) Définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Remarque : Si f est dérivable en a et

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

On pose : $h=x-a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Exemple: Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+1+h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}h^2+3h+4=4=f'(1)$

3) Propriétés :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0.

$(I=]x_0-r;x_0+r[$ et $r\succ 0)$

f une fonction dérivable en x_0 ssi il existe un réel L et une fonction ϕ définie sur $J=]-r;r[$ tel que : $\forall h\in J$ on a :

$f(x_0+h)=f(x_0)+L\times h+h\phi(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\phi(h)=0$

Preuve : on suppose que f est dérivable en x_0

alors : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=0$

Soit la fonction ϕ définie sur $J=]-r;r[$ par :

$\phi(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ si $h\neq 0$ et $\phi(0)=0$

On a donc : $f(x_0+h)=f(x_0)+L\times h+h\phi(h)$ et $\lim_{h\to 0}\phi(h)=0$

Inversement si il existe un réel L et une fonction ϕ définie sur $J=]-r;r[$ tel que : $\forall h\in J$ on a :

$f(x_0+h)=f(x_0)+L\times h+h\phi(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\phi(h)=0$

On a f est dérivable en x_0 (evident)

Propriété : Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

Propriété : Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve : Puisque f est dérivable en a alors :

$f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)+(x-a)\phi(x)$

en passant à la limite : $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x)=|x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques : 1) La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a

On peut écrire alors : $f(x)\sim f'(a)(x-a)+f(a)$ au voisinage de a

2) Si on pose $x=a+h$; on aura :

$f(a+h)\sim f'(a)h+f(a)$ qui dit que si on ne connait pas f $(a+h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h+f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre : $f(x)=sinx$ et $a=\pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h=3-\pi$ (pour avoir : $3=\pi+h$)

On a alors $f(a)=sin\pi=0$ et $f'(a)=cos\pi=-1$ (à prouver) ce qui donne :

$sin3=sin(\pi+h)\sim-1\times(3-\pi)=\pi-3$.

II) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION et OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

1) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est Df , a et b deux éléments de Df tels que : $a<b$

1) On dit que f est dérivable sur l'ouvert] a, b[si elle est dérivable en tout point de]a, b[

2) On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert [a, b[si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a

3) On dit que f est dérivable sur le fermé [a, b] si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a et à gauche de b

2) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.

3)Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
cos	$-sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
$tanx$	$1+tan^2x$	$]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{-\pi}{2}+k\pi[,k\in\mathbb{Z}$

4)OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

La fonction	**Sa fonction dérivée**
$f+g$	$f'+g'$
$f.g$	$f'.g+g'.f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Exercice4 : Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x^2)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=4(u(x))'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=((x^4)\times(\cos x))'=(x^4)'\times(\cos x)+(x^4)\times(\cos x)'$

$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=(u(x))'+(v(x))'=\frac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\dfrac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{\left(4x^2+3x-1\right)'}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}-6\frac{8x+3}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}$$

7) $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\quad$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x)\succ 0\ \ \forall x\in D_f-\{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{-2;2\}$

$\forall x\in D_f-\{-2;2\}$:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x)=(2x+3)^5$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=(u(x))^5$ avec $u(x)=2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x+3)^5\right)'=5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)'=5\times2\times(2x+3)^4=10(2x+3)^4$$

III) DERIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I)\subset J$
et a un élément de I.

1) Si f est dérivable en a et g dérivable en $b=f(a)$ alors (gof) est dérivable en a et $(gof)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

2) Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors (gof) est dérivable sur I et pour tout a dans I on a :$(gof)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

Preuve : Puisque f est dérivable en a alors :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\in\mathbb{R}$$

Et Puisque g est dérivable en $b=f(a)$ alors :

$$\lim_{k\to0}\frac{g(b+k)-g(b)}{k}=g'(b)\in\mathbb{R}$$

On a : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}$$

On pose $k=f(a+h)-f(a)$

On a : $\displaystyle\lim_{h\to0}k=\lim_{h\to0}f(a+h)-f(a)=0$

car f est continue en a
(car elle est dérivable en a)
et $f(a+h)=k+f(a)$ par suite :

$$\lim_{h\to0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k}\times\frac{k}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k}\times\frac{f(a+h)\ f(a)}{h}$$

car : $k=f(a+h)-f(a)$

$$=\lim_{k\to0}\frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k}\times\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)\ f(a)}{h}$$

$=g'(f(a)\times f'(a)$

Exercice5 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin\left(2x^2-1\right)$

2) $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)$

3) $f(x)=\tan\cos(x)$

IV) DERIVATION DE LA FONCTION RECIPROQUE :

1) Propriété et exemple.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur I et soit f^{-1}sa fonction réciproque de $J = f(I)$ vers I.

On suppose que $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et que $(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I})(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{y}) \neq \mathbf{0})$

Montrons que f^{-1}est dérivable sur J

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}$$ (car $(\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)$)

$$=\lim_{x\to y_0}\frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}$$ (car quand x *tend vers* x_0

on a: $y = f^{-1}(x)$ *tend ers* $f^{-1}(x_0)$)

$$=\frac{1}{f'(y_0)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}$$

Théorème : Soient f une fonction continue strictement monotone sur I, et $J = f(I)$ et a un élément de I

1) Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$

Et : $\left(f^{-1}\right)'(x_0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}$

2) Si f est dérivable I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1}est dérivable sur J et

$(\forall x \in J)$ $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Exemple : $f(x) = cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1,1]$ (à Prouver) et on a : $f(\pi/2) = 0$

et $f'(\pi/2) = cos'(\pi/2) = -sin(\pi/2) = -1 \neq 0$

alors f^{-1}est dérivable en 0

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{-1}=-1$$

Exercice6 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=x^3+x^2$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Exercice7 : Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Monter que g est une bijection de $]0, \pi/2[$ Vers$]-1,1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0,\pi/2[)$ $(g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $]-1,1[$.

Correction :1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

- Si $x \in [0,\pi/2]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite : $g'(x) = -2\sin(2x) \leq 0$
- Si $x \in [\pi/2, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2\sin(2x) \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $]0,\pi/2[$ vers $g(]0,\pi/2[)$

$g(]0,\pi/2[) =]\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)[=]-1,1[$

Donc g est une bijection de $]0,\pi/2[$ vers $]-1,1[$; soit g^{-1}sa fonction réciproque.

3- On a :g est dérivable sur $]0,\pi/2[$ et $(\forall x \in]0,\pi2[)$ $(g'(x) = -2\sin(2x) \neq 0)$ donc g^{-1}est dérivables sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$; $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$

$$=\frac{1}{-2\sin\left(2g^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{-2\sqrt{1-\cos^2\left(2g^{-1}(x)\right)}}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{1-\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)^2}}=\frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}$$

Pour x dans$]-1,1[$. $\boxed{\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}}$

2) La dérivée de la racine n-eme

Activité :1- Montrer que la fonction $x\to\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

2- Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

3- Soit u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I.

a) Montrer que $x\to\sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I.

b) Montrer que $(\forall x\in I)\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{\left(u(x)\right)'}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$

Propriété 1 : Soit n un entier naturel non nul

1) La fonction $x\to\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

2) Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction $x\to\sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{\left(u(x)\right)'}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$

Exercice 8 : Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+x-4}$

2) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice 9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{\sqrt[5]{x^4+1}-\sqrt[4]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x+1}}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(2x^2+x+1\right)-\pi/2}{2\arctan(x)-\pi}$

Propriété 2 : Soit r un nombre rationnel

1) La fonction $x\to x^r$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

2) Si u une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I alors la fonction ur est dérivable sur I et $(\forall x\in I)$ $\left(u(x)^r\right)'=ru(x)^{r-1}\times\left(u(x)\right)'$

Exercice10 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (E_1): $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

(E_2): $2x\sqrt{x}-3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

Correction : 1) (E_1): $\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[6]{9-x^2}$

Le domaine de définition de l'équation (E_1)

Est : $D_{(E_1)}=[-3;3]$

On a :

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$(E_1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+x}-\sqrt[3]{3-x}\right)^3=\left(\sqrt[6]{9-x^2}\right)^3$

$\Leftrightarrow(3+x)-(3-x)-3\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$

On a :

$\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt[6]{\left(9-x^2\right)^2}\sqrt[6]{9-x^2}=\sqrt[6]{\left(9-x^2\right)^3}=\sqrt{9-x^2}$

Donc : $(E_1)\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-x^2}$

$(E_1)\Leftrightarrow x=2\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4\left(9-x^2\right)\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{6\sqrt{5}}{5}\right\}$

2) $2x\sqrt{x}-3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}}=20$

Le domaine de définition de l'équation (E_2)

Est : $D_{(E_2)}=]0;+\infty[$

Soit $x\succ0$ on pose : $t=\sqrt[4]{x}$ donc $t\succ0$

Et on a : $(E_2)\Leftrightarrow2t^6-3t^3-20=0\ (t^3=T)$

$(E_2)\Leftrightarrow2T^2-3T-20=0\quad\Delta=169$

La solution positive de cette équation est : $T=4$

Donc : $t^3=4\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$ et on a : $t=\sqrt[4]{x}$

Donc :

$x=t^4\Leftrightarrow x=\left(\sqrt[3]{4}\right)^4=\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\sqrt[3]{4}=4\sqrt[3]{4}$

Donc : $S=\left\{4\sqrt[3]{4}\right\}$

Exercice 11 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **2)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}$ **4)** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

Solutions : 1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ on pose

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=L_1$

On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Et : $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b++a^2b^2+b^3)$

$$L_1=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\,\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}$$

$$L_1=\lim_{x\to1}(x+1)\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}=2\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^3}-\sqrt[12]{(x+1)^4}}{\sqrt[12]{x^6}-\sqrt[12]{(x+1)^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}\,\frac{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1}{1-\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}}-1=-1$

et $\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x+1}}=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)$$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}=+\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$=\frac{1}{3}$ car $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}=1$

Exercice12 : soit f une fonction définie sur

$I=]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=2\frac{\cos x-1}{\sin x};si...0\prec x\prec\pi \\ f(x)=\frac{x|x+1|}{x-1};si...-\pi\prec x\le 0\end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0=0$ et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0=-1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0=-1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}2\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}-2\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2\times\frac{1}{2}\times1=-1=f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f'_d(0)=-1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x+1|}{x-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x-1}=-1=f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=0$ et $f'_g(0)=-1$

Et puisque : $f'_d(0)=f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0=0$ et $f'(0)=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0)=-1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$ est : $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$y=0-1(x-0)\Leftrightarrow(T):y=-x$

2) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}=f_d'(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=-1$ et $f_d'(-1)=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{-x}{x-1}=-\frac{1}{2}=f_g'(-1)$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=-1$ et

$f_g'(-1)=-\frac{1}{2}$ mais on a : $f_d'(-1)\neq f_g'(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_d'(-1)(x+1)$ avec $x\geq-1$

$y=0+\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_d):y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ avec $x\geq-1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_g'(-1)(x+1)$ avec $x\leq-1$

$y=0-\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_g):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ avec $x\leq-1$

Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x\in D_f\Leftrightarrow 3x-2\geq0$ et $x-1\neq0$

Donc : $D_f=\left[\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) on a $f(x)=g(3x-2)\times h(x)$

Avec : $h(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x\to3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2\succ0\Leftrightarrow x\succ\frac{3}{2}$ donc la fonction $x\to g(3x-2)$ est dérivable sur $D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'}=D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x\in D_{f'}$:

$f'(x)=\left(g(3x-2)\right)'\times h(x)+g(3x-2)\times\left(h(x)\right)'$

$\left(g(3x-2)\right)'=(3x-2)'\times g'(3x-2)=3\times\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$

Car : $g'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(h(x)\right)'=3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'\times\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$

Donc :

$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\times\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3+\sqrt{3x-2}\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

Exercice14 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x)=(x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1)=(-1+2)^{2018}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

Et puisque : $f'(x)=2018(x+2)^{2017}(x+2)'=2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1)=2018\times1^{2017}=2018$

Donc: $\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}=2018$

2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x)=2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$

Donc : $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\left(\frac{\pi}{6}\right)}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x)=2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Donc : $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l’on devient un mathématicien