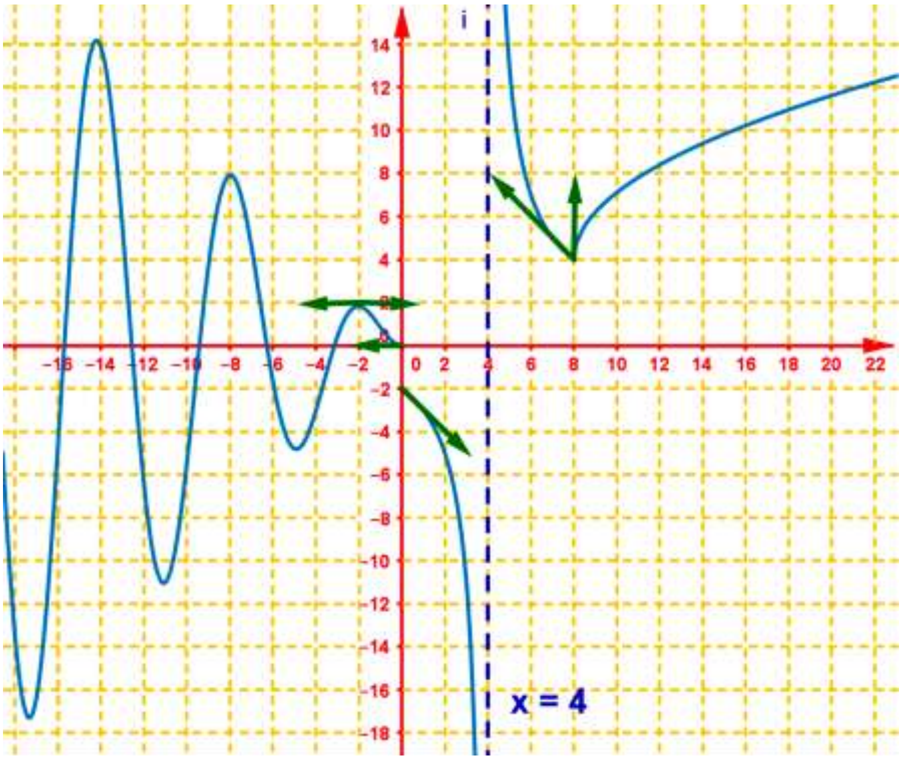
I.

La figure ci-contre représente (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. En déduire graphiquement les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

b. $\lim\limits_{x\to8} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>0}} f(x)$

2. Que peut-on dire de la limite de f au voisinage de $-\infty$.

3. ..

a. Etudier graphiquement la continuité à droite de $x_0 = 0$.

b. Etudier graphiquement la continuité à gauche de $x_0 = 0$.

c. Est-ce que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

4. ..

a. Est-ce que la fonction f est dérivable à droite de $x_0 = 0$.

b. Est-ce que la fonction f est dérivable à gauche de $x_0 = 0$.

c. Est-ce que la fonction f est dérivable en $x_0 = 0$.

d. Donner le nombre dérivé à gauche de $x_0 = 0$.

e. Donner $f'(-2)$.

f. Donner l'équation réduite de la tangente en $x_0 = -2$.

g. Donner l'équation réduite de la demi tangente à gauche $x_0 = 0$.

4. .. On considère g la restriction de la fonction f sur $I_1=[2,+\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J_1 dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} puis construire la demie tangente à droite de $x_0=4$ à la courbe $(C_{g^{-1}})$

5. .. On considère h la restriction de la fonction f sur $I_2=]0,4[$.

a. Montrer que la restriction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J_2 dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1} .

2.

Calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f pour chaque fonction s suivante :

1. $f(x)=5x^3-7x^2+\frac{7}{5}x+9$ et $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3x^2+1}{x}$ et $f(x)=\frac{7x+2}{3-x}$ et $f(x)=(5x+1)^4$.

2. $f(x)=\sqrt{x}+3x$ et $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ et $f(x)=x^3\sqrt{4x+1}$ et $f(x)=\sqrt{x+2}\times(5x-3)^4$

   $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+2}$ et $f(x)=\sqrt{\frac{3x-5}{2-x}}$ et $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+7}}$.

3. $f(x)=\sin(5x+2)$ et $f(x)=\sin^3(x)$ et $f(x)=\sin 2x\cos 3x$ et $f(x)=\tan(3x)$ et

   $f(x)=x^2+3\sin x$

4. $f(x)=\sqrt[5]{x}$ et $f(x)=\sqrt[3]{x^{11}}$ et $f(x)=\sqrt[5]{x^2-7x+12}$ et $f(x)=(x^2-7x+12)^{\frac{2}{5}}$.

3.

Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 :

1.

a. $x_0=1$ avec $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \\ f(0)=1 \end{cases}$.

b. $x_0=0$ avec $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} \\ f(0)=0 \end{cases}$.

c. $x_0=1$ avec $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{7x+1} \ , \ x<0 \\ f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+1} \ , \ x\geq 0 \end{cases}$.

2. On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} & ; x \leq 3 \\ f(x) = \frac{x}{x-2} & ; x > 3 \end{cases}$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 3[$ puis déduire le nombre dérivé en $x_0 = 2$.

b. Donner la fonction affine approximative de la fonction f en $x_0 = 2$.

c. En déduire une valeur approchée du nombre $f(1,999)$.

d. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 3$ puis interpréter le résultat graphiquement .

e. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(3, f(3))$.

3. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

a. Etudier la dérivabilité en $x_0 = 0$.

b. Donner la fonction affine approximative de la fonction f en $x_0 = 0$.

c. En déduire une valeur approchée du nombre $f(0,01)$.

4.

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

1. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 1$ puis interpréter le résultat graphiquement .

2. Etudier la dérivabilité droite de f au point $x_0 = 0$ puis interpréter le résultat graphiquement .

5.

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} & ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 6x + 8 & ; x < 2 \end{cases}$.

1. Vérifier que : la fonction numérique f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. ..

a. Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 2$.

3. ..

a. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0 = 2$ puis interpréter le résultat graphiquement .

b. Calculer : $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$ puis interpréter le résultat graphiquement .

c. Est-ce que la fonction f est dérivable en $x_0 = 2$.

4. ..

a. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

b. Sur l'intervalle $]2, +\infty[$ calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f .

5. ..

a. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]-\infty,2[$.

b. Sur l'intervalle $]-\infty,2[$ calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f .

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

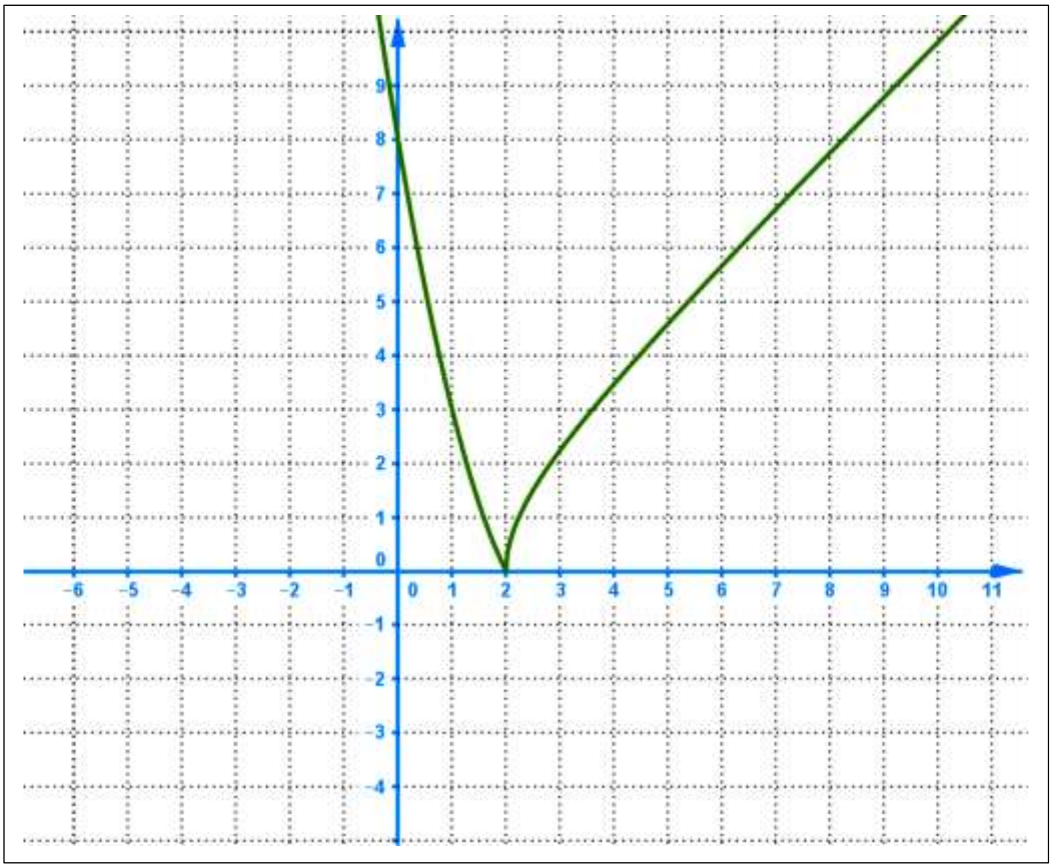
6. Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point $x_1=1$.

7. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=[2,+\infty[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

c. la figure suivante représente la courbe représentative de la fonction f Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .



8. ..

a. Démontrer que l'équation $x\in]-\infty,2[\ :\ f(x)=3$ admet une unique puis on déterminera graphiquement.

b. Démontrer que l'équation $x\in[2,+\infty[\ :\ f(x)=3$ admet une unique puis solution α dont on précisera dans le quel un intervalle $]a,b[$ avec a et b sont deux entiers naturels et $b-a=1$?

Note : dans cette question on ne demande pas de résoudre cette équation .

c. En déduire les solutions de l'équation $x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)=3$.

6.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x+\sqrt{x^2-x}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. ..

a. Etudier la dérivabilité à gauche de f au point $x_0=0$ puis interpréter le résultat graphiquement .

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)}{x-1}$ puis interpréter le résultat graphiquement .

4. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]-\infty,0[$ $f'(x)=-1+\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ puis déterminer son signe sur $]-\infty,0[$.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]1,+\infty[$ puis déterminer son signe sur $]1,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

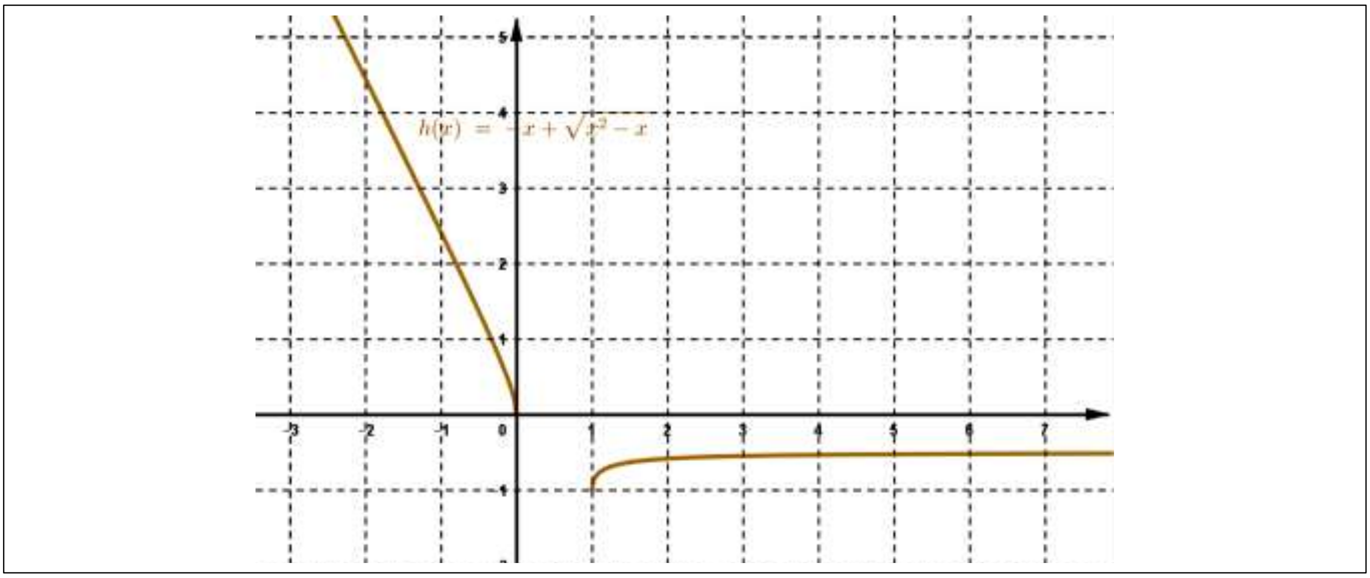
5. ..Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on déterminera .

b. Calculer : $g(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(-2+\sqrt{2}\right)$.

c. Expliciter $g^{-1}(x)$.

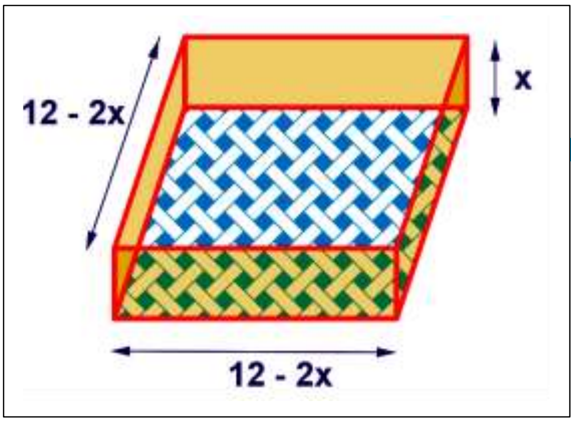
d. La figure ci-contre représente la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Tracer de 2 cm la courbe représentative de g^{-1}



7.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^3-48x^2+144x$.

1. ..
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. déterminer son signe sur $\mathbb{R}$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,20]$.



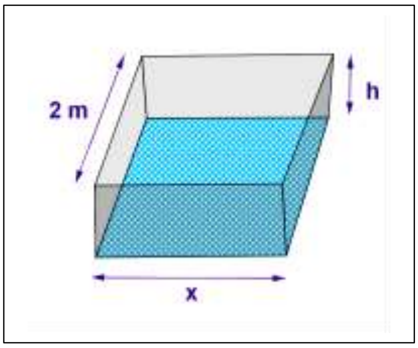
2. Un fabriquant des boites en carton envisage la production de boites de pâtisseries de forme parallélépipédique rectangle tel que chaque boite :
   - Sa hauteur est de longueur x cm (avec $0<x<6$) .
   - Sa base est de la forme d'un carré dont la longueur du coté est : $12-2x$ cm.

   a. Vérifier que : $V(x)$ le volume de chaque boite en fonction de x est : $V(x)=4x^3-48x^2+144x$.
   b. Donner la valeur de x qui corresponde à une volume maximale

8.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x)=2x+4+\dfrac{8}{x}$.

1. ..
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
   b. déterminer son signe sur $\mathbb{R}^*$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,5;4]$.
   e. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $x_0=1$



On se propose de construire un réservoir en tole de forme parallélépipédique rectangle dont le volume intérieur soit $4\ m^3$ (mètre cube) .le nombre h est la mesure de la hauteur de ce parallélépipède rectangle et sa base a un coté mesure x m et l'autre pour longueur 2 m.

2. Déduire des informations données , une realtion entre h et x .
   a. Montrer que : la somme des aires des faces du parallélépipède rectangle (sans le couvercle) en fonction de x s'écrit: $S(x)=2x+4+\dfrac{8}{x}$.
   b. Déterminer les valeurs de x et de h qui correspondent à une aire minimale .

9.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}=]0,+\infty[$ par : $f(x)=0,06x+\dfrac{150}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.
2. déterminer son signe sur $]0,+\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f $]0,+\infty[$.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[10,130]$.

5. La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v , pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h , par l'expression suivante : $C(v)=0,06v+\dfrac{150}{v}$.

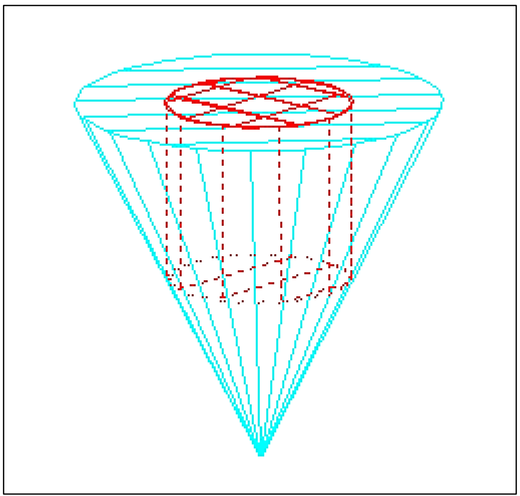
6. A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

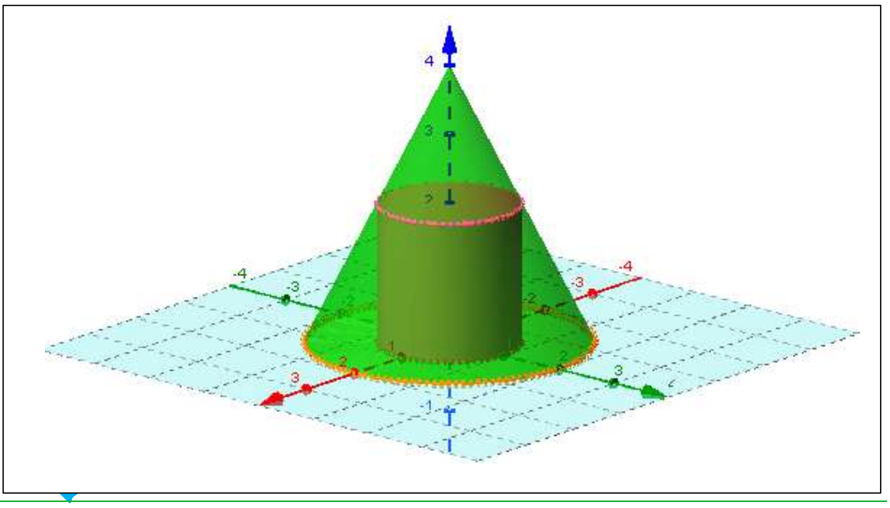
10.

Un ciylindre de révolution de rayon x cm est inscrit dans un cone de révolution de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm . le volume de ce cylindre , exprimé en cm^2 , est donné par la formule suivante :

$$V(x)=30\pi x^2\left(1-\frac{x}{10}\right) \text{ où } 0\le x\le 10$$

1. Déterminer : x pour que le volume du cylindre soit maximale .





11.

Le nombre d'accident est donné par $A(r)=20000-10r^2$; c'est la fonction de cout .l'optimisation serait la recherche du nombre d'accident minimum A_{min} et le nombre de radar r_{opt} qui permet d'attendre ce minimum.