Dérivabilité et étude des fonction (série n°1)

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et interpréter le résultat graphiquement.

① - $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2}{x+1} \\ f(-1)=5 \end{cases}$; $x_0=-1$;; ② - $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\tan x} & ;\ 0\prec x\prec\dfrac{\pi}{2} \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

③ - $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-1} & ;\ x\prec 1 \\ f(x)=x^2+x-2 & ;\ x\geq 1 \end{cases}$; $x_0=1$;; ④ - $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{4-x^2} & ;\ 0\leq x\leq 2 \\ f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x-2} & ;\ x\succ 2 \end{cases}$; $x_0=2$

Exercice 2 :

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivantes :

① - $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$;; ② - $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+1}$;; ③ - $f(x)=\left(\dfrac{x^2-2x}{x-1}\right)^4$

④ - $f(x)=x^3\times\cos\left(x^2-x\right)$;; ⑤ - $f(x)=x^5\times\sqrt[3]{x^2-3x+5}$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

② - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$.

b - Etudier les variations de f.

④ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$.

b - Etudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et déterminer ce point d'inflexion.

⑤ - Etudier les branches infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑦ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[4;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Calculer $(g^{-1})'(9)$.

c - Calculer $(\forall x\in J)$: $g^{-1}(x)$.

d - Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

✍ Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

① - Déterminer D_f, puis calculer $\lim_{x\mapsto 1^+} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

② - Calculer $\lim_{x\mapsto -\infty} f(x)$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)$.

③ - a - Montrer (Δ) d'équation $y=x-2$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.

b - Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ).

④ - Etudier la dérivabilité de f en 0 à gauche et interpréter le résultat graphiquement.

⑤ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$, puis Dresser le tableau de variation de f.

⑥ - Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α tel que $2\prec\alpha\prec\frac{5}{2}$.

⑦ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑧ - Soit m un paramètre réel. Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{\frac{x}{x-1}}=x-1-m$.

⑨ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=]1;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Calculer $g^{-1}(0)$, puis montrer que $(g^{-1})'(0)=\frac{2(\alpha-1)^3}{1+2(\alpha-1)^3}$.

c - Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

✍ Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

① - Déterminer D_f, puis calculer $\lim_{x\mapsto -\infty} f(x)$.

② - Montrer (Δ) d'équation $y=-x+\frac{2}{3}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

③ - Etudier la dérivabilité de f en 2 à gauche et en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0,2\}$, puis Dresser le tableau de variation de f.

⑤ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑥ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. et calculer $(g^{-1})'(1)$