

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \in ]-\infty, 2[ \\ f(x) = \sqrt{x+2} + 10 & \text{si } x \in [2, +\infty[ \end{cases}$$

- 1) Calculer  $f(2)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- 2) Est-ce que la fonction  $f$  est continue en 2 ?
- 3) Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

### Exercice 2 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^3 + 3x - 2$

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une seule solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$  et que  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- 2) Donner un encadrement d'amplitude  $0,125$  de  $\alpha$ .
- 3) En déduire que :  $(\forall x \in [0; \alpha]); f(x) \leq 0$  et  $(\forall x \in [\alpha; +\infty]); f(x) \geq 0$
- 4) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera, puis calculer  $f(0)$  ;  $f^{-1}(-2)$  et  $(f^{-1})'(-2)$ .

### Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$(C_f) \begin{cases} f(x) = 3 - 3x - x^3 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

et sa courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche en 1.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en 1. Puis Interpréter graphiquement les résultats.
- 3) calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ]-\infty, 1[$ .
- 4) Montrer que le point  $I(0; 3)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$ .
- 5) Donner le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 6) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$ .
- 7) Ecrire une équation de la tangente à  $(C_f)$  au point  $I$ .
- 8) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $] -\infty, 1[$  et que  $\alpha \in ]0; 1[$ .
- 9) Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 10) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $] -\infty, 1[$ , montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera, puis tracer sa courbe dans le repère précédent.

**Exercice 4 :**

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

- Déterminer  $D_f$ , puis étudier les variations de  $f$ .
- Soit  $f$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; -2]$ , montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera.
- Calculer  $g^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ , puis déterminer  $g^{-1}(x)$ .

**Exercice 5 :**

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

- Déterminer  $D_f$ , calculer les limites de la fonction aux bornes ouvertes de  $D_f$ .
- a - Vérifier que  $(\forall x \in [0; +\infty[); \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$   
b - En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $I = [0; +\infty[$ .
- Soit  $f$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .  
a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer.  
b) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

**Exercice 6 :**

Soit une fonction définie par :  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

- Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Soit  $f$  la restriction de  $f$  sur  $I = [1; +\infty[$ .  
a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera.  
b) Donner le tableau de variation de  $f$ .  
c) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

**Exercice 7 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$$

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = x^2$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]0; 1[$ .
- Soit  $f$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [4; +\infty[$

a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque et préciser son domaine de définition.

b) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

**Exercice 8 :**

Calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{5-x^3} + x \qquad B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1}$$

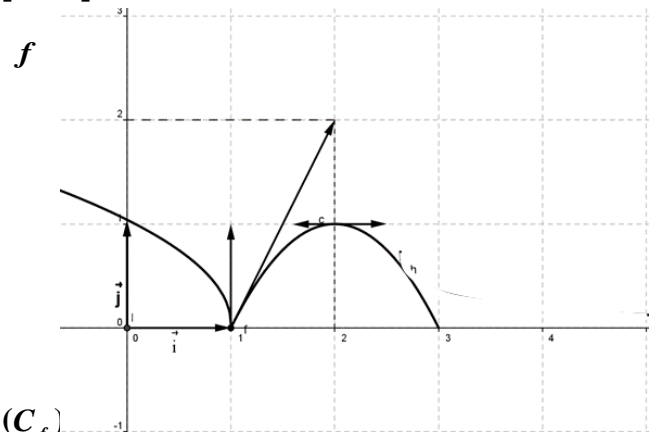
$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - x}{x} \qquad D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{4x^2 + x}}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \qquad F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

Rappel :  $a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$  et  $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

**Exercice 9 :**

La courbe ci dessous et celle d'une fonction  $f$  définie sur  $]-\infty; 3]$ .



- Déterminer  $f'(2)$ , (justifier)
- Donner  $f_d'(1)$ , (justifier)
- $f$  est-elle dérivable à gauche en 1, justifier ?
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]-\infty; 3]$ .

**Exercice 10 :**

Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

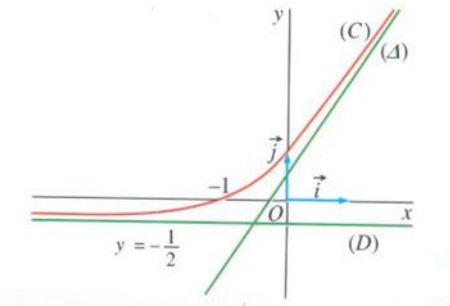
et sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

- Déterminer  $D_f$ , puis étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ . Justifier les réponses !
- Etudier la parité de  $f$  et en déduire un élément de symétrie de  $D_f$ .
- Etudier les limites de  $f$  aux bornes du domaine  $D_f$  et en déduire les asymptotes éventuelles à  $D_f$ .

- 4) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
- 5) Etudier la concavité de  $f$  et résumer cette étude dans un tableau.
- 6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $f$  au point d'abscisse 0.
- 7) Etudier la position de  $f$  par rapport à  $(T)$ .
- 8) Tracer  $f$  et  $(T)$  dans le repère.

### Exercice 11 :

$(C)$  désigne la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthonormé.



- La droite  $(D): y = -\frac{1}{2}$  est une asymptote horizontale à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- La droite  $(\Delta): y = 2x + \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Par une lecture graphique.

- 1) Déterminer le signe de  $f(x)$ .
- 2) Déterminer le sens de variations de  $f$ .
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2})$ .

### Exercice 12 :

Soit une fonction tel que :  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$

Et sa courbe dans un repère orthonormé

- 1) Montrer que  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4) a)- Montrer que :  $(\forall x \in D_f); f(x) = x + 1 - \frac{x+1}{x^2}$   
b)- Montrer que la droite  $(\Delta): y = x + 1$  est une asymptote oblique à  $f$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 5) a)- Montrer que :

$$(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2 - x + 2)}{x^4}$$

b)- Etudier le signe de  $f'(x)$ , puis dresser le T.V.

- 6) Montrer que :  $(\forall x \in D_f); f''(x) = \frac{-2(x+3)}{x^4}$  et étudier la concavité de  $f$  puis en déduire que  $f$  admet un point d'inflexion  $I$ .
- 7) Etudier la position relative de  $f$  et de  $(\Delta)$ .
- 8) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $f$  au point d'abscisse 1.
- 9) Tracer la courbe  $f$  et la droite  $(T)$ .

### Exercice 13 :

Partie 1 : Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 2) Vérifier que :  $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ .
- 3) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$ .

Partie 2 : Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$$

- 1) Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) = g(x)$ .
- 2) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq -1$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 4) Montrer que la droite  $(D): y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 5) Tracer,  $f$  et  $(D)$  dans un repère orthonormé.

### Exercice 14 :

Partie 1 : Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$$

- 1) Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .

Partie 2 : Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2\sqrt{3 + x^2} - x$$

- 1) Etudier les branches infinies de  $f$ .
- 2) Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) = g(x)$ , puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Donner une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $f$  en son point d'abscisse -1.
- 4) Tracer la courbe  $f$ .