Dérivation : Dérivabilité à droite à gauche	• f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$. $\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell\in\mathbb{R}\right)$ $\ell=f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 . • f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_d\in\mathbb{R}$. $\left(\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_d\in\mathbb{R}\right)$ $\ell_d=f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 . • f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_g\in\mathbb{R}$. $\left(\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_g\in\mathbb{R}\right)$ $\ell_g=f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 . • f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$
Interprétation géométrique du nombre dérivé $f'(x_0)$	• $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse x_0 • équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 est : $(T):y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$. • Si $f'(x)=0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse . • La fonction $u(x)=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ s'appelle la fonction affine tangente à la courbe de f au voisinage de x_0 . • La fonction $(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ est une approximation affine de la fonction f au voisinage de x_0 . On écrit $f(x)\approx u(x)$ au voisinage de x_0 . • On pose $x=x_0+h$ on a $f(x_0+h)\approx u(x_0+h)$ ou encore $f(x_0+h)\approx hf'(x_0)+f(x_0)$
Dérivabilité sur un intervalle	• f est dérivable sur un intervalle ouvert $(I=]a,b[)$ $\Leftrightarrow$ pour tout x de I f est dérivable en x • f est dérivable sur $[a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite de a • f est dérivable sur $]a,b]$ $\Leftrightarrow$ f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche de b f est dér. sur $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b
La fonction dérivée	• La fonction définie par : $\forall x\in I$ on a $x\mapsto f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I on note f'. • La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$. • La fonction dérivée de $f^{(n)}$ sur I s'appelle la fonction dérivée (n+1)ième (dérivée d'ordre $n+1$) on note $\left(f^{(n)}\right)'$ ou $f^{(n+1)}$

Operations sur les fonctions dérivables	$(f+g)'=f'+g'$	$(\alpha\times f)'=\alpha\times f'$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
	$(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$	$\left(f^n\right)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$; $n\in\mathbb{Z}^*$; $g(x)\neq 0$
	$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$; $(x\in I\,,\,g(x)\neq 0)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$; $(x\in I\,,\,g(x)\neq 0)$

	f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a: $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\times g'(f(x_0))$	
Applications de $(g\circ f)'(x)$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\times\sqrt{f(x)}}$; $x\in D_{f'}$ et $f(x)>0$	$(\sin(ax+b))'=a\times\cos(ax+b)$; sur $\mathbb{R}$
	$(\tan(ax+b))'=a\times\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$ $=a\times\dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$	$(\cos(ax+b))'=-a\times\sin(ax+b)$; sur $\mathbb{R}$
La fonction dérivée de la fonction réciproque	f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction f (avec f est continue et strictement monotone sur I et $f(I)=J$). ($(x_0\in I)$; $x_0\mapsto f(x_0)=y_0$; $(y_0\in J)$) • Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(x_0)=y_0$. • On a $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$ ou $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.	
Applications	$g'(x)=\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$; $n\in\mathbb{N}^*$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\left((f(x))^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}\times f'(x)\times(f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
	$g'(x)=\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$; $r\in\mathbb{Q}^*$	$\left([f(x)]^r\right)'=r\times f'(x)\times[f(x)]^{r-1}$; $r\in\mathbb{Q}^*$

Applications de la dérivation

La fonction dérivée f '	**Extremums**	• f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f admet une extremum en $a\in I$ alors $f'(a)=0$. • f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $f'(a)=0$ ($a\in I$) et f ' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de f .
	Monotonie de f	• Si $\forall x\in I : f'(x)>0$ (même si f ' s'annule en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur l'intervalle I . • Si $\forall x\in I : f'(x)<0$ (même si f ' s'annule un nombre fini de point) alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I . • Si $\forall x\in I : f'(x)=0$ alors f est constante sur I .
La fonction dérivée f "	**Position relative de la tangente et la courbe – la concavité**	$\forall x\in I : f''(x)>0$ (la fonction dérivée seconde) alors : • La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes pour tout point $M(x_0,f(x_0))$ tel que $x_0\in I$. • Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives . on note $\smile$
		$\forall x\in I : f''(x)<0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

		• La courbe $\left(C_f\right)$ de f est située au dessous des tangentes pour tout point $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ tel que $x_0 \in I$. • Dans ce cas on dit que la courbe $\left(C_f\right)$ de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives . on note $\frown$
	Points d'inflexions	Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en $x_0 \in I$ (I intervalle ouvert) et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion au courbe $\left(C_f\right)$; dans ce cas la tangente au point $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ coupe (ou traverse) la courbe.
Centre de symétrie de $\left(C_f\right)$		Le point $I\left(a,b\right)$ est centre de symétrie à la courbe $\left(C_f\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ ; \ 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ ; \ f(2a-x)+f(x)=2b \end{cases}$
Axe de symétrie de $\left(C_f\right)$		La droite d'équation $D: x=a$ est un axe de symétrie à la courbe $\left(C_f\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ ; \ 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ ; \ f(2a-x)=f(x) \end{cases}$
Domaine d'étude d'une fonction f	f est paire f est impaire	f est une fonction définie sur $D_f = I \cup I'$ (I et I' sont symétriques par rapport à 0 (zéro) avec I contient juste les nombres positifs . • Si f est paire ou bien impaire il suffit d'étudier la monotonie de f sur I ❖ Si f est paire : la fonction f a la même monotonie (même variations) sur I et I' ❖ Si f est impaire : la monotonie de f sur I et I' sont opposées . ❖ donc il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$ (D_E est appelé ensemble d'étude de f)
	f est périodique	f est périodique de période $P=T$ son ensemble d'étude est $D_E = D_f \cap \left[a,a+T\right]$ avec $a \in \mathbb{R}$. • On préfère $a=0$ ou bien $a=-\frac{T}{2}$ • On obtient : $D_E = D_f \cap \left[0,T\right]$ ou bien : $D_E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

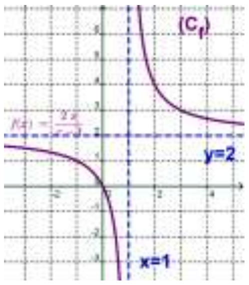
Les branches infinies

1er cas : Asymptote horizontale

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$

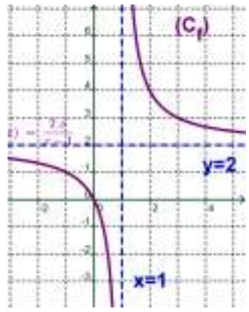


2ième cas : Asymptote verticale

$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$



3ième cas : Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

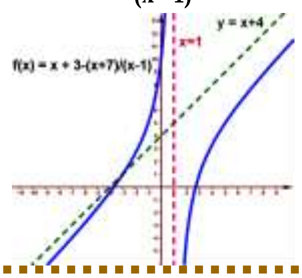
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ voisinage de $\pm\infty$

$f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$ Exemple

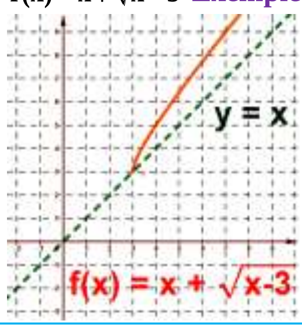


Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

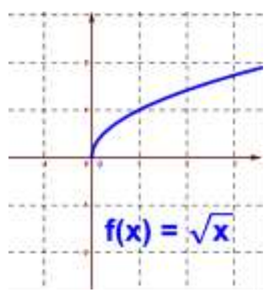
$f(x) = x + \sqrt{x-3}$ Exemple



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

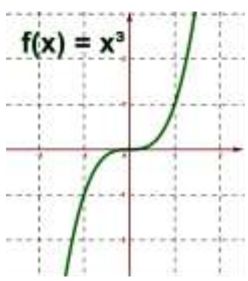
Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnés

$f(x) = x^3$ Exemple



les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)