

**Dérivabilité d'une fonction en un point :**

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = f'(x_0)$ , avec  $l \in \mathbb{R}$ .

Le nombre réel  $f'(x_0)$  s'appelle nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $x_0$ .

**Interprétation géométrique :**

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$  donc la courbe  $(\mathcal{E}_f)$  admet une tangente  $(\Delta)$  au point  $A(x_0, f(x_0))$  d'équation :  $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

**Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche :**

⊗ On dit que la fonction  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' = f'_d(x_0) \quad , \quad \text{avec } l' \in \mathbb{R} .$$

⊗ On dit que la fonction  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'' = f'_g(x_0) \quad , \quad \text{avec } l'' \in \mathbb{R} .$$

★ Si :  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$  donc la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

**Interprétation géométrique :** La courbe  $(\mathcal{E}_f)$  admet une tangente  $(\Delta)$  au point

$A(x_0; f(x_0))$  d'équation :  $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

★ Si :  $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

**Interprétation géométrique :** La courbe  $(\mathcal{E}_f)$  admet au point  $A(x_0; f(x_0))$  deux demi-tangente  $(T_1)$  à droite et  $(T_2)$  à gauche d'équations :

$(T_1): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  et  $(T_2): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

★ Si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

**Interprétation géométrique :** La courbe  $(\mathcal{E}_f)$  admet au point  $A(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives.

★ Si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

**Interprétation géométrique :** La courbe  $(\mathcal{E}_f)$  admet au point  $A(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.**Opérations sur les fonctions dérivables :**

★ Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $\alpha$  un nombre réel.

Alors :  $(f \pm g)' = f' \pm g'$  ;  $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$  ;  $(\alpha f)' = \alpha f'$

et  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$ .

★ Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et  $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$ .

$$\text{Alors : } \left(\frac{a}{g}\right)' = -\frac{a \times g'}{g^2} ; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}.$$

★ Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $(\forall x \in I): f(x) > 0$ .

$$\text{Alors : } (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}} ; \left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n(\sqrt[n]{f})^{n-1}}.$$

★ Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables respectivement sur deux intervalles  $I$  et  $J$ , tel que  $f(I) \subset J$ . Alors la fonction composée  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$ , et on a :

$$(\forall x \in I): (g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x).$$

★ Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , tel que  $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$ , alors la

fonction  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(I) = J$ . De plus, on a pour tout  $x \in J: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' [f^{-1}(x)]}$ .

### ↳ Dérivabilité et variations d'une fonction :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- ★ Si  $(\forall x \in I): f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- ★ Si  $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- ★ Si  $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

### ↳ Dérivabilité et extremums d'une fonction :

★ On dit que  $f(x_0)$  est un extremum local de  $f$  sur un intervalle  $I$ , si  $f(x_0)$  est un minimum ou maximum local de  $f$  en  $x_0$  un intervalle  $I$ .

★  $f$  est un fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  est un réel de  $I$ .

si  $f(x_0)$  est un extremum local de  $f$  en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

Donc la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet au point  $A(x_0; f(x_0))$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

### ↳ Concavité et point d'inflexion :

Soit  $f$  une fonction numérique, à variable réel deux fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

- ★ Si  $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  tourne sa concavité vers les ordonnées positives.
- ★ Si  $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  tourne sa concavité vers les ordonnées négatives.
- ★ Si  $(\exists x_0 \in I): f''(x_0) = 0$  en changeant de signe, alors le point  $A(x_0; f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

### ↳ Éléments de symétrie d'une courbe :

★ Le point  $\Omega(a; b)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  si et seulement si :

$$\clubsuit (\forall x \in D_f) : (2a - x) \in D_f.$$

$$\clubsuit f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

★ La droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  si et seulement si :

$$\clubsuit (\forall x \in D_f) : (2a - x) \in D_f.$$

$$\clubsuit f(2a - x) = f(x).$$