

EXERCICE 1: (10 pts)

1,5 pts A) a) Montrer que ; $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{1 + e^x}$

A) b) Simplifier le nombre : $E = \frac{e^{1 - \ln(2)}}{e^{1 \cdot \ln(2)}}$

4 pts B) Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

a) $e^{\frac{1}{x}} = e^x$, b) $3e^{2x} - e^x - 2 = 0$, c) $2^{x+1} = 8$, d) $1 - 2e^x < 0$

4,5 pts C) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 2$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{2x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x + 4$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + x^2}$

EXERCICE 2: (4,5 pts)

1pt 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Les points A, B, C et D d'affixes respectivement : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$

$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $d = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$

1pt a) Ecrire chacun des nombres b et c sous la forme trigonométrique

0,5 pts b) Vérifier que : $bc = d$

0,5pts c) Déduire l'argument du nombre complexe d

1,5 pts d) Soit le point E l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que l'affixe du point E est $e = -2 - 2i$ puis montrer que le triangle ABE est Rectangle et isocèle en B

EXERCICE 3 : (5,5 pts)

Partie 1 : On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - x$

0,5 pts 1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

1 pt 2) Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} , puis donner le tableau de variation de g

0,5 pts 3) Dédire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$

Partie 2 Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2e^x - x^2 - 1$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0,5 pts 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

0,5 pts 2) Calculer ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(Remarquer que : $(\forall x > 0) \quad f(x) = x^2 \left(2 \frac{e^x}{x^2} - 1 \right) - 1$)

0,5 pts 3) Déterminer les branches infinies de (C_f)

0,5 pts 4) a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 2g(x)$

0,5 pts b) Donner le tableau de variation de f

0,5 pts c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -0,6, -0,3[$

0,5 pts d) Représenter (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})