

Devoir Surveillé 1

Niveau : 2BacSP

Prof : Abdessamad Rouchad

Exercice I :

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x}(2 - e^{2x}) - x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité : 2 cm)

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
b) Résoudre l'équation $2 - e^{2x} = 0$, puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty, \frac{\ln 2}{2}]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty[$.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
- 4) a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = -(2e^{2x} - 1)^2$
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 5) Montrer que $A(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4})$ est un point d'inflexion de (C) .
- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{\ln 2}{2}$
- 7) Construire (Δ) et (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ci-dessus (On prendra $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$ et $\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} \approx 1,1$)
- 8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R} .
b) Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice $y = x$)
c) Calculer $(f^{-1})'(1)$ (Remarquer que $f^{-1}(1) = 0$)

Exercice II :

- 1) Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z^2 - 6(1 - \sqrt{3})z + 72 = 0$
 - a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -36(\sqrt{3} + 1)^2$
 - b) En déduire les solutions de l'équation (E) .
- 2) Soient les nombres complexes $a = 3(1 - \sqrt{3}) - i3(\sqrt{3} + 1)$, $b = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $c = -\sqrt{3} - 3i$
 - a) Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 12b$
 - b) Écrire les nombres complexes b et c sous forme exponentielle.
 - c) En déduire que $a = 6\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que D est l'image de B par l'homothétie h de centre O et du rapport $\sqrt{2}$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-7\pi}{12}$
 - a) Déterminer d l'affixe de D
 - b) Vérifier que $z' = \frac{\sqrt{2}}{12}az$
 - c) Déterminer l'image du point C par la rotation R
 - d) Déterminer la nature du triangle ODC .