Groupe scolaire Inisse	EXAMEN N° 2 DE MATHEMATIQUES	2eme pc fr Durée : 2H Coefficient : 7

EXERCICE 1 $(15pts)$

2 pts 1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\ln\left(e^3\right)+2\ln(3e)+\ln\left(\frac{1}{9}\right) \quad , \quad B=\ln\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}+1\right)+\ln\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}-1\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4,5 pts 2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x)=\ln(x)$, b) $1+2\ln(x)\succ 0$, c) $(\ln(x))(2-\ln(x))\succ 0$, d) $\ln^2(x)-\ln(x)-2=0$

4 pts 3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f(x)=\sqrt{x}+\ln(x)$, $I=]0,+\infty[$

b) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$, $I=]1,+\infty[$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $I=]0,1[$

d) $f(x)=\ln\left(x^2+x+4\right)$, $I=\mathbb{R}$

4,5 pts 4) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x+\ln^2(x)$, b) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x+\ln(x)$, c) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 1+\dfrac{\ln(x)}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \ln\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -x^3+x+2+\ln(x)$, f) $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\ln^3(x)$

EXERCICE 2 $(5pts)$

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité $2cm$)

0,5 pts 1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

0,5 pts 2) Montrer que la fonction f est impaire

0,75 pts 3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et interpréter le résultat

0,5 pts b) Montrer que : $\lim_{x \mapsto 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 pts 4) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1,+\infty[) \qquad f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

0,25 pts b) Déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

1 pt 5) Tracer la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet deux points d'inflexion : $A\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$

Et $B\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$)

6) Soit la fonction g restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0,5 pts a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} en déterminant son domaine de Définition

0,5 pts b) Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

(Remarquer que $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$)