Lycée Ibn Zohr Tanger	Devoir libre 2 Semestre 1	P. Hicham ESSAFI 2022 /2021

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$

$\left(C_f\right)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Etudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$
3) Etudier la position relative de la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): y=x$
4) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f
   d) Construire (Δ) et $\left(C_f\right)$
5) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$.
   a) Montrer par récurrence que, $u_n>1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$.
   b) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 4$, $u_n\geq 0$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 5$, $u_n\geq n-3$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) On définit la suite (v_n) par : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$.
   c) Soit la somme S_n définie par : $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.