

Devoir Surveillé 2

Niveau : 2BacSP

Prof : Abdessamad Rouchad

Partie I :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$$

- 1) a) Déterminer D_f
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 2) a) Étudier la dérivabilité de f en 0^+ , puis interpréter le résultat géométriquement.
- b) Écrire l'équation de (T) la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse 0, à droite.
- 3) a) Étudier la dérivabilité de f sur D_f , et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$$

- b) Calculer $f'(4)$ et $f'(1)$ puis interpréter géométriquement chacun des résultats.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) a) Montrer que (C_f) coupe l'axe (OX) en deux points A et B . à déterminer.
- b) Étudier la position relatives de (C_f) et l'axe des abscisses.
- 5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - x = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$$

- b) Déduire que (C_f) coupe la droite $(D) : y = x$ en trois points A ; E et F .
- c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) .
- 6) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

- b) Déduire la concavité de (C_f) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I et donner ses coordonnées.
- 7 Tracer dans le même repère : la demi-tangente (T) , la droite (D) et la courbe (C_f) .

Partie II :

On définit la suite (u_n) par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}$$

- 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
- 2) Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.
- 3) Calculer la limite de la suite (u_n)