

Exercice 1 (8 pts)

1,5 pts 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe (O, \vec{u}, \vec{v}) les points :

A, B, C d'affixes respectivement : $a = -1 + i$, $b = 1 + i$, $c = (1 + \sqrt{3})i$

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$

1,5 pts a) Montrer que : $z' = -iz$

1,5 pts b) Dédire que le point B est l'image du point A par la rotation R

1,5 pts c) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 pt d) Ecrire le nombre complexe : $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous la forme trigonométrique

1 pt e) Dédire que le triangle ABC est équilatéral

Exercice 2 (6 pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5} \end{cases}$$

1,5 pts 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$

2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

1,5 pts a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$

1,5 pts b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et écrire v_n en fonction de n

1,5 pts c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ puis déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 3 (6 pts)

Partie 1 :

Soit la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x + 3 - 3\ln(x)$

0,5 pts 1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x}$

0,5 pts b) Dédire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$

0,5 pts 2) Dédire que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$

Partie 2 :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(\frac{x+3}{x}\right)\ln(x)$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0,5 pts 1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 pts 2) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

0,5 pts b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pts 3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

0,5 pts b) Donner le tableau de variation de la fonction f

0,5 pts 4) a) Etudier le signe de : $f(x) - x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 pts b) Dédire que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et au dessous de (Δ) sur l'intervalle $]0, 1]$

0,5 pts c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1$$

0,5 pts d) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})