

Exercice n°1 (4,5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \frac{20u_n}{u_n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 1.a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > 19$

0.75 b) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(19 - u_n)}{u_n + 1}$ puis déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

0.5 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[19, 20]$

2. On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 19}$

0.75 a) Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 20$ puis exprimer v_n en fonction de n

0.75 b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \frac{19v_n}{v_n - 1}$ puis déduire que $u_n = \frac{19 \times 20^{n+1}}{20^{n+1} - 1}$

0.5 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (justifier votre réponse)

0.5 3.a) Montrer que $u_n - 19 < 10^{-25} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(19 \times 10^{25} + 1)}{\ln 20} - 1$

0.25 b) Déduire la valeur du plus petit entier naturel n tel que $u_n - 19 < 10^{-25}$

Exercice n°2 (4 pts)

0.5 1.a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E) : $\frac{1}{4}z^2 - \sqrt{3}z + 4 = 0$

(On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que $\text{Im}(z_1) > 0$)

0.25 b) Ecrire sous forme trigonométrique la solution z_1 de (E)

0.5 c) Montrer que z_1^{21} est imaginaire pur

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les

points A et B d'affixes respectives z_A et z_B telles que $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_B = -2 + 2\sqrt{3}i$

0.5 a) Montrer que l'écriture complexe de la rotation R de centre le point B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = -iz - 2(1 + \sqrt{3}) + 2(\sqrt{3} - 1)i$$

0.25 b) Déduire que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$

3. Soit le point D d'affixe $z_D = 2\sqrt{3} - 6i$

0.25 a) Montrer que les points O, B et D sont alignés

0.5 b) Montrer que $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

0.75 c) Déduire que $AD = AC$ et $(\overline{AC}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ puis donner la nature du triangle ACD

0.5 4. Montrer que la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$

Exercice n°3 (11,5pts)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x + 1 - \ln x$

0.75 1. a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

0.5 b) Montrer que $(\forall x \in I), g'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$

0.5 2. a) Dresser le tableau de variations de g sur I

0.25 b) Dédire que $(\forall x \in I), g(x) > 0$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x} - \ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.75 1. a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

0.75 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

0.5 c) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$

0.5 2. a) Dresser le tableau de signes de $(1-x)\ln x$

0.5 b) Dédire que $(\forall x \in I), f(x) \leq x$

1 3. a) Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ puis dédire que f est strictement croissante sur I

0.5 b) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

0.5 c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

1 d) Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f)

0.25 4. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R}

0.75 b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

0.5 c) Montrer que $f^{-1}\left(\frac{2019}{2020}\right) < 1$

5. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = \frac{20}{19}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 a) Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

1 c) Dédire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente puis calculer sa limite