المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.**
- ✓ **Écrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 pages numérotées de 1 à 4, celle-ci est comprise.**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domines comme suit :

Exercice 1	**Suites numériques**	**3.5pts**
Exercice 2	**Nombres complexes**	**5pts**
Exercice 3	**Fonctions primitives, dérivabilité**	**1.75pts**
Problème	**Étude d'une fonction numérique**	**10.25pts**

- ✓ ln **désigne la fonction logarithme népérien**

Exercice 1 : (3.5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021}$

0.5 **1) a) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n**

0.5 **b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{2020}{2021}(1 - u_n)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est décroissante.**

0.25 **c) En déduire que $u_n \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier naturel n**

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n

0.5 **a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2021}$**

0.5 **b) Exprimer v_n en fonction de n**

1.5 **3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{v_{n+1}} - e}{v_n}\right) = 1$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$**

Exercice 2 : (5points)

0.75 **1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ tel que :**

$$(E) : \quad z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha)\, z + 4\tan(\alpha) = 0$$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 - \sqrt{3} - \left(\sqrt{3} + 1\right)i \quad ; \quad b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad c = -6 + 6i$$

0.75 **a) Écrire b sous forme exponentielle et vérifier que $b^{2021} = \bar{b}$**

0.75 **b) Montrer que $a = \frac{-i\bar{c}}{3b^{2021}}$ et prouver que $Arg(a) \equiv -\frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$**

1 **c) En déduire que $a = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$**

3) La rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

0.75 **a) Vérifier que $z' = -bz$ et montrer que $d = -3a$ est l'affixe du point D image du point C par la rotation $\mathcal{R}$.**

0.25 **b) En déduire que les points A, D et O sont alignés.**

0.75 **c) Déterminer une solution de l'équation $z^2 - z = 9a^2 + bc$**

Exercice 3 : (1.75 points)

Soit $w(x)$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $w(x) = -x + 1 + xe^{2x+2}$

0.25 **1) Étudier la dérivabilité de la fonction w au point d'abscisse $x_0 = 0$**

0.25 **2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $w(x) = 1$**

0.5 **3) a) Vérifier que $2w(x) + w'(x) - w''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$**

0.75 b) **En déduire W la fonction primitive de la fonction w tel que $W(-1) = -\frac{7}{4}$**

Problème : (10.25points)

Partie I :

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$

0.25 **1) Vérifier que $h(1) = 0$**

2) A partir du tableau de variation de la fonction h ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$h(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

0.25 **Montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$.**

Partie II :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)\ln x$

0.25 **1) Vérifier que $(\forall \in]0;+\infty[\,)$; $g(x) = 1 + h(x) + (x-1)\ln x$**

0.5 **2) Montrer que $(x-1)\ln x \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$**

0.25 **3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$**

Partie III :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x\,(x - \ln x) + 1$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (Unité : 1cm)

0.5 **1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.**

0.5 **2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$**

0.5 **b) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées.**

0.5 **3) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$**

0.25 **4) a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$; $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$**

0.5 **b) Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation $(\ln x - 1)h(x) = 0$**

0.5 **c) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la tangente (T).**

0.75 **5) a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$**

0.25 **b) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$**

0.25 **c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$**

0.5 **6) Montrer que** $f(x) \leq x$ **pour tout** x **appartenant à l'intervalle** $[1\ ,\ e]$

0.75 **7) Construire dans le même repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$**, la tangente** (T) **et la courbe** $\left(C_f\right)$ **(On admettra que la courbe** $\left(C_f\right)$ **possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1 et 1.5)**

<u>Partie IV</u> :

Soit (u_n) **la suite numérique définie par** $u_0 = \sqrt{e}$ **et pour tout** $\boldsymbol{n}$ **de** $\mathbb{N}$ **;** $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 **1) Montrer par récurrence que** $1 \leq u_n \leq e$ **pour tout entier naturel** n

0.25 **2) Montrer que la suite** (u_n) **est décroissante (On pourra utiliser le résultat de la question** III-6) **)**

0.5 **3) En déduire que la suite** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

<u>Partie V</u> :

0.5 **1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que** $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$

0.75 **2) Montrer que la fonction** $x \longmapsto x \ln x - x$ **est une fonction primitive de la fonction** $x \longmapsto \ln x$ **sur l'intervalle** $]0\ ,+\infty[$ **puis montrer à l'aide d'une intégration par parties que** $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$

0.5 **3) Calculer, en** cm^2 **l'aire du domine plan limité par la courbe** $\left(C_f\right)$ **et la droite d'équation** $y = 1$ **pour tout** $1 \leq x \leq e$

الله ولـــي التوفيـــــق

El-ouarzazi Mohamed
Mathématiques
direction provinciale Khenifra
année scolaire 2020/2021
Bacalaureat 2021
Whatsapp : 062202?567