Table des matières

01

I. On considère l'équation différentielle suivante : $(E): y'' - 2y' + y = 0$.

01. Résoudre l'équation (E) .

02. Déterminer la fonction h qui vérifie l'équation (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et $h'(0) = -1$.

03. Vérifie que : la fonction $g(x) = 2 - xe^x$ vérifie l'équation $(E_1): y'' - 2y' + y = 2$.

II. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - xe^x$.

01. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

02. …

a. Calculer g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$; puis donné le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$ et $0,8 < \alpha < 0,9$.

c. On déduit que le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x de $\mathbb{R}$.

III. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x+2}{e^x + 2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de mesure est 2 cm) .

01. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une inter présentation géométrique du résultat obtenue .

02. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

03. Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique la droite (Δ_1) au voisinage de $-\infty$ et déterminer son équation .

04. ..

a. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ_1) .

b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

05. ..

a. Montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(2 + e^x)^2}$.

b. On déduit le signe de $f'(x)$.

c. Démontrer que : $f(\alpha)=\alpha$.

d. Dresser le tableau des variations de f .

e. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les deux droites (Δ_1) et (Δ) .

06. On considère la fonction k la restriction de f sur $I=[-1;\alpha]$.

a. Montrer que : k est une bijection de I vers J ; on détermine J .

b. Vérifier que : $k(0)=\frac{2}{3}$ puis déterminer $(k^{-1})'\left(\frac{2}{3}\right)$.

c. Construire $(\mathcal{C}_{k^{-1}})$ la courbe représentative de k^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

IV. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

01. Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le\alpha$.

02. ..

a. On utilise (C_f) et la droite (Δ) présenter sur l'axe des abscisses : u_0 et u_1 et u_2 .

b. Donner la conjoncture sur la monotonie de (u_n) .

c. Prouver la validité de la conjoncture .

d. On déduit que : (u_n) est convergente .

e. Déterminer la limite de (u_n) .

02

I. On considère l'équation suivante : $(E)\ :\ z\in\mathbb{C}\ \ ,\ z^2-2z+5=0$.

01. Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E) tel que $\mathrm{Im}(z_1)>0$.

02. On déduit la solution générale de l'équation différentielle suivante : $(E_1): y''-2y'+5y=0$.

II. Soit le nombre complexe : $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$.

01. Montrer que : le module de a est $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

02. Vérifier que : $a=2\sin\frac{\pi}{6}+2i\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

03. ..

a. θ est un nombre réel montrer que : $1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$ (on rappel que $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$.

b. Montrer que : $a=4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+4i\sin^2\frac{\pi}{12}$. (on rappel que $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$) .

c. Montrer que $4\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et qui représente la forme trigonométrique de a puis on déduit la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

III. Dans le plan complexe (P) rapporté a un repère orthonormé $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$; on considère les points A et B d'affixes respectivement $a=1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$ et b . soit R la rotation de centre O origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

01. Donner la forme trigonométrique de b l'affixe de B image de A par la rotation R .

03

Dans un laboratoire d'essaies scientifiques un cage contient 5 lapins indiscernables au touche dont 2 lapins de la catégorie 2 et 2 lapins de la catégorie 5 et 1 lapin de la catégorie 4 .

I. On considère l'expérience suivante : un chercheur tire au hasard et simultanément deux lapins de la cage sachant que tous les lapins ont même probabilités d'être tirés .

01. Calculer probabilité de l'événement suivante C : « les 2 lapins tirés sont de même catégorie » .

02. Calculer probabilité de l'événement suivante D : « les 2 lapins tirés n'ont pas même parité de la catégorie » .

II. Soit la variable aléatoire X définie par « il associe à chaque tirage le produit des numéros de leurs catégories » .

01. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .

02. Déterminer la loi de probabilité de X .

03. EsT ce que les événements C et $(X=10)$ sont indépendants .

III. On répète l'expérience précédente quatre fois et à chaque fois on remet les lapins au cage avant de répété l'expérience .

01. Calculer la probabilité de l'événement K « l'événement C se réalise une fois et une seule lorsqu'on répète l'expérience quatre fois »

02. On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement C est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédent quatre fois »

a. Comment on appelle la variable aléatoire Y et on précise ses paramètres .

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y) .

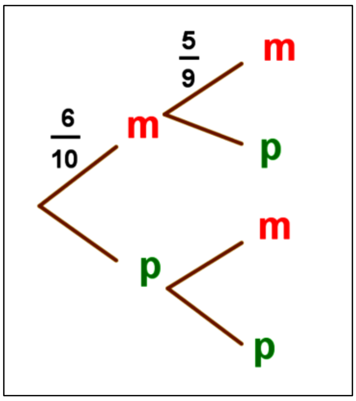
c. Donner $p(Y=k)$ avec $k\in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04

Pour déterminer deux questions a un examen d'orale ; l'étudiant tire au hasard deux cartes l'une après l'autre d'une boite contenant 6 cartes qui concernent les questions de mathématique (on les désigne par m) et 4 cartes qui concernent les questions de la physique (on les désigne par p) ; on suppose que les cartes sont indiscernables au touche .

01. Compléter l'arbre de probabilités (ci- contre)



02. On considère les événements suivants :

A « les deux cartes tirées sont de la physique »

B « les deux cartes tirées ne sont pas de la même matière » .

Montrer que : $p(A)=\frac{2}{15}$ et $p(B)=\frac{8}{15}$.

03. On considère la variable aléatoire X définie par « il associe à chaque tirage de deux cartes le nombre de cartes de physique tirées »

a. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire X .

b. Déterminer la loi de probabilité de X .

05

Dans l'espace $(\mathscr{E})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère :

- Les deux points $A(2,0-1)$ et $B(0,-3,4)$ et $C(-1,2,0)$.

01. ..

a. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-13\vec{i}-13\vec{j}-13\vec{k}$.

b. Est-ce que les points A et B et C sont alignés .

c. Déterminer les cordonnés du vecteur : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Est-ce que les points A et B et C sont alignés .

d. On déduit qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+y+z-1=0$.

e. Calculer : la surface du triangle ABC.

02. ..

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $\Omega(5,0,2)$ et orthogonale au plan (ABC) .

b. Vérifie que la projection orthogonale du point Ω sur le plan (ABC) est le point $H(3,-2,0)$.

c. Vérifie que la distance $r=\Omega H=2\sqrt{3}$.

d. Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S_1) de centre Ω et de rayon $r=\Omega H=2\sqrt{3}$.

e. Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère (S_1) .

03. Soit (S_2) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie la relation suivante :

(S_2) : $x^2+y^2+z^2-2x+8y+4z+5=0$.

a. Déterminer la nature de (S_2) et ses éléments caractéristiques .

04. ..

a. Calculer la distance du point $I(1,-4,-2)$ au plan (ABC) .

b. On déduit que le plan (ABC) coupe le sphère suivant un cercle (Γ) .

c. Déterminer R_Γ le rayon de (Γ) . Puis les cordonnés du point I_Γ centre de (Γ) .