

TABLE DES MATIERES

- I.** EXERCICE N° 1 : FONCTION EXPONENTIELLE ET SUITE DE LA FORME $u_{n+1} = f(u_n)$
- II.** EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .
- III.** EXERCICE N° 3 : SUITE DE LA FORME : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$
- IV.** EXERCICE N° 4 : SUITE DE LA FORME : $u_{n+1} = au_n + b$.
- V.** CONCOURS DE LA FACULTE DE MEDECINE D'OUJDA 2014- 2015 (5 QUESTIONS) .

01

Le but de ce problème d'étudier la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ avec $x \in [0; +\infty[$.

I. Soit la fonction g définie sur $D = [0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

01. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

02. ..

a. Calculer g' la fonction dérivée de g pour tout x de $D = [0; +\infty[$ puit montrer que

$$\forall x > 0, g'(x) > 0$$

b. Calculer $g(0)$ et on déduit que $\forall x > 0, g(x) > 0$; puis $\forall x \geq 0, e^x > x$.

II. Soit la fonction h définie sur $D = [0; +\infty[$ par : $h(x) = -1 + (2-x)e^x$.

01. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

02. ..

a. Calculer h' la fonction dérivée de h pour tout x de $D = [0; +\infty[$.

b. On déduit le signe de $h'(x)$.

c. donner le tableau de variations de h .

d. montrer que l'équation : $x \in [0; +\infty[; h(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $\alpha > 1$.

e. Vérifier que : $1,84 < \alpha < 1,85$.

f. Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x de $[0; +\infty[$.

III. ..

a. Soit la fonction f définie sur $D = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

b. (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité de mesure 2 cm .
(la construction sera sur l'annexe 2 voir page 4)

01. Montrer que f est définie pour tout x de $[0; +\infty[$.

02. Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

03. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

04. Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

05. Donner le signe de f' puis donner le tableau de variations de f .

06. Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

07. On déduit suivant les valeurs de x de $D = [0; +\infty[$ la position relative de la courbe (C_f) de la fonction f et la droite (D) d'équation $(D) : y = x$.

08. Construire la courbe (C_f) de f et la droite (D) d'équation $y = x$ dans le même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité de mesure 2 cm . (la construction sera sur l'annexe voir page 7) .

09. ..

a. Montrer que : $\int_2^4 f(x) dx = \ln(e^2 + 2)$.

b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

10. Soit k la restriction de f sur l'intervalle $I = [0; \alpha]$.

a. Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Construire la courbe $(C_{k^{-1}})$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c. Vérifier que $k(1) = 1$; puis montrer que k^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(k^{-1})'(1)$.

IV. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

01. Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

02. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$.

03. ..

a. Présenter sur l'axe des abscisses : u_0 et u_1 et u_2 ; On utilise (C_f) et la droite (D) .

b. Donner la conjoncture sur la monotonie de (u_n) .

c. Prouver la validité de la conjecture .

d. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

e. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

02

I. On donne le nombre complexe suivant : $a = 2 + \sqrt{3} + i$.

01. Montre que : le module de a est $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

02. Vérifier que : $a = 2\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) + 2i \sin \frac{\pi}{6}$.

03. ..

a. θ est un nombre réel : montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$ (on rappelle que $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$) .

b. Montrer que : $a = 4\cos^2 \frac{\pi}{12} + 4i \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$ (on rappelle que $\sin 2\theta = 2\cos \theta \sin \theta$) .

c. Montrer que : $4\cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ est l'écriture trigonométrique de a puis on déduit la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

II. On considère l'équation suivante : (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}z + 1 = 0$.

01. Montrer que : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

02. Déterminer : z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

03. On déduit les solutions de l'équation différentielle suivante : (E) : $2y'' - (\sqrt{6} + \sqrt{2})y' + 2y = 0$.

04. Donner l'écriture trigonométrique de : z_1 et z_2 .

III. Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; on considère les points A et B tel que leurs affixes sont $a = 2 + \sqrt{3} + i$ et b ; R est la rotation de centre le point O origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

01. ..

a. Donner l'écriture complexe de la rotation R .

b. Donner l'écriture trigonométrique de b l'affixe de B tel que B est l'image de A par la rotation R .

03

Le but de cet exercice d'étudier la convergence de (u_n) de quatre manières différentes :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1^{ère} manière :

01. Calculer u_1 et u_2 .

02. Démontrer que : $u_n \neq \frac{1}{3}$ pour tout n de \mathbb{N} .

03. Démontrer que : $1 < u_n \leq 3$ pour tout n de \mathbb{N} .

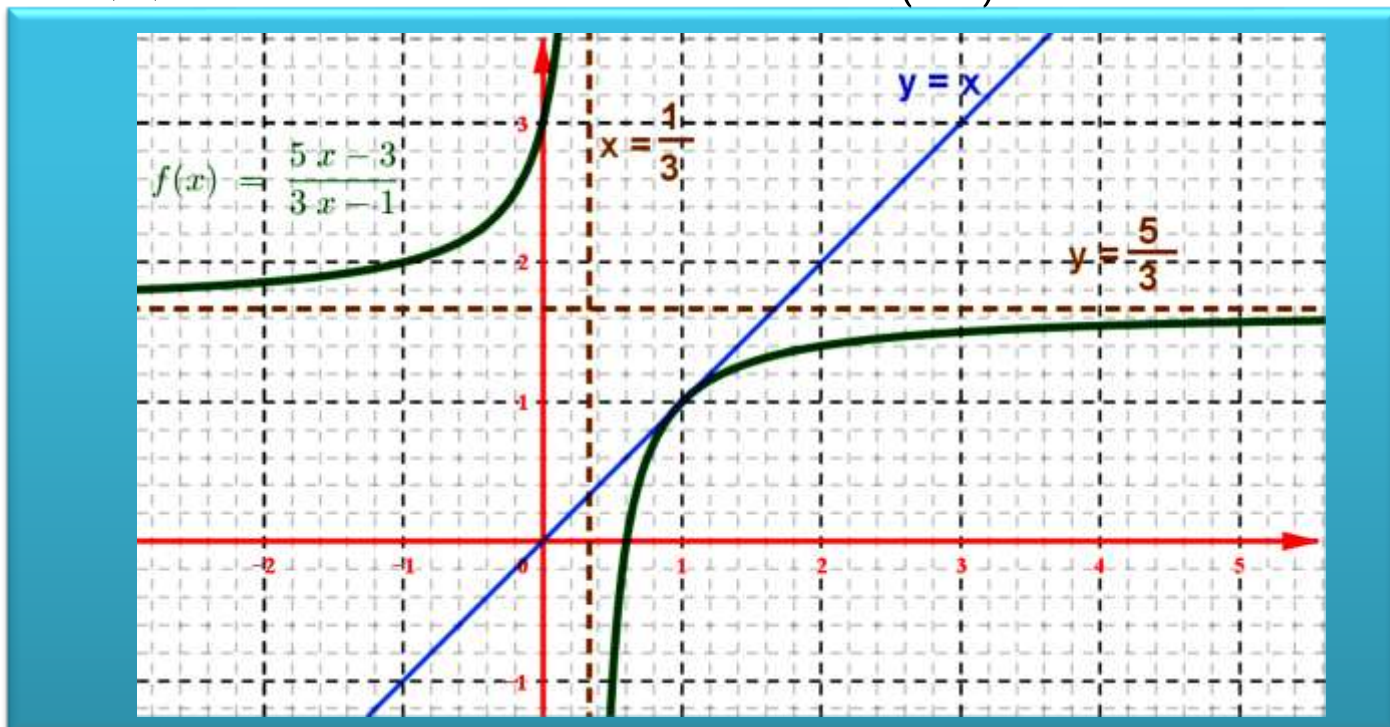
04. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_n - 1)^2}{3u_n - 1}$ pour tout n de \mathbb{N} puis on déduit la monotonie de (u_n) .

05. Etudier la convergence de (u_n) .

2^{ème} manière :

06. ..

- On considère la fonction suivante : $f(x) = \frac{5x-3}{3x-1}$.
- (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})



- Déterminer graphiquement l'intersection de (C_f) et la droite (D) d'équation $(D): y = x$.
- Déterminer graphiquement l'image de $I = [1, 3]$ par la fonction f .
- Placer u_0 et u_1 et u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses ; puis donner la conjecture obtenue pour l'encadrement de la suite (u_n) la monotonie de (u_n) et la limite de (u_n) .

3^{ème} manière :

01. Maintenant on va démontrer la conjecture obtenue :

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 < u_n \leq 3$.
- Démontrer que : (u_n) est croissante.

c. Est-ce que (u_n) est convergente .

d. Déterminer la limite de (u_n) .

4^{ième} manière :

01. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$ pour tout n de \mathbb{N} .

a. Calculer : v_0 .

b. Montrer que : la suite (v_n) est arithmétique on détermine sa raison r .

c. Donner v_n en fonction de n

d. Donner u_n en fonction de n .

e. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; est que (u_n) est convergente .

f. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_3 + \dots + v_n$.

g. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

04

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$$

01.

e. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 3 \leq u_n \leq 8$.

f. Démontrer que : (u_n) est croissante .

g. Est-ce que (u_n) est convergente .

02. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 8$ pour tout n de \mathbb{N} .

a. Montrer que : la suite (v_n) est géométrique on détermine sa raison q .

b. Montrer que : $u_n = 8 - \frac{5}{2^n}$ pour tout n de \mathbb{N} .

c. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

d. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel p qui vérifie : pour tout n de \mathbb{N} on a Si $n \geq p$ alors $u_n - 8 > -10^{-5}$.

e. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_3 + \dots + v_n$.

f. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

05

السؤال 3 :

لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وزوجية و دورية دورها T .

$\int_T f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx$.D	A. المشتقة $f'(x)$ زوجية و دورية.
جميع الأجابة المقترحة خاطئة. .E	B. المشتقة $f'(x)$ فردية و ليست بالضرورة دورية.
	C. $\forall k \in \mathbb{Z}, f'(kT) = 0$

السؤال 4 : لتكن $f(x)$ الدالة المعرفة بما يلي $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و C_f المنحنى الممثل لها في معلم متعامد منظم .

D. المعادلة $f(x) = e^{-x}$ ليس لها حل.	A. مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.D _f
E. يقطع المماس للمنحنى C_f عند نقطة M أفصولها $x_M = 0$ محور الأفاصل عند النقطة $N(2;0)$.	B. الدالة $f(x)$ تزايدية على مجال تعريفها .
	C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

السؤال 5 : لتكن $f(x)$ و $g(x)$ الدالتان المعرفتان على المجال $[0;1]$ بما يلي: $f(x) = 2x$ و $g(x) = x^2$ و ليكن C_f المنحنى الممثلللدالة $f(x)$ و C_g المنحنى الممثل للدالة $g(x)$ في معلم متعامد منظم .المساحة S (بوحد قياس المساحة) لحيز المستوى المحصور بين المنحنيين C_f و C_g و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

هي:

0 .A	2 .D	2/3 .C	1/3 .E
1 .B			

كلية الطب و الصيدلة - وجدة

مباراة الولوج 2015/2014

السؤال 7 : اختر الجواب الصحيح:

E. الدالة $f(x) = x+5 - 3-x + 2x - 3$ لا تمثل دالة أصلية على \mathbb{R} .	C. نعتبر دالة عديدة $g(x)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} المعادلة $g'(x) = 2g(x)$ غير قابلة للحل في \mathbb{R} .	A. يمثل المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تماثل المنحنى الممثل للدالة $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
	D. الدالة $h(x) = 4x(x-5) $ غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 5$.	B. المنحنى الممثل لدالة ومقاربه المائل لا يتقاطعان أبداً.

السؤال 8 : نعتبر المكعب ABCDEFGH (الشكل جاتيه) طول ضلعه a .

	D. المستقيم (AG) غير عمودي للمستقيم (DE). E. $\overline{BC} \wedge \overline{BA} = \overline{BG}$.	A. $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{EA}$ B. \overline{AG} متجه منظمية على المستوى (BDE). C. $\overline{AG} \cdot \overline{BE} = a^2$
--	--	---

