TABLE DES MATIERES

01

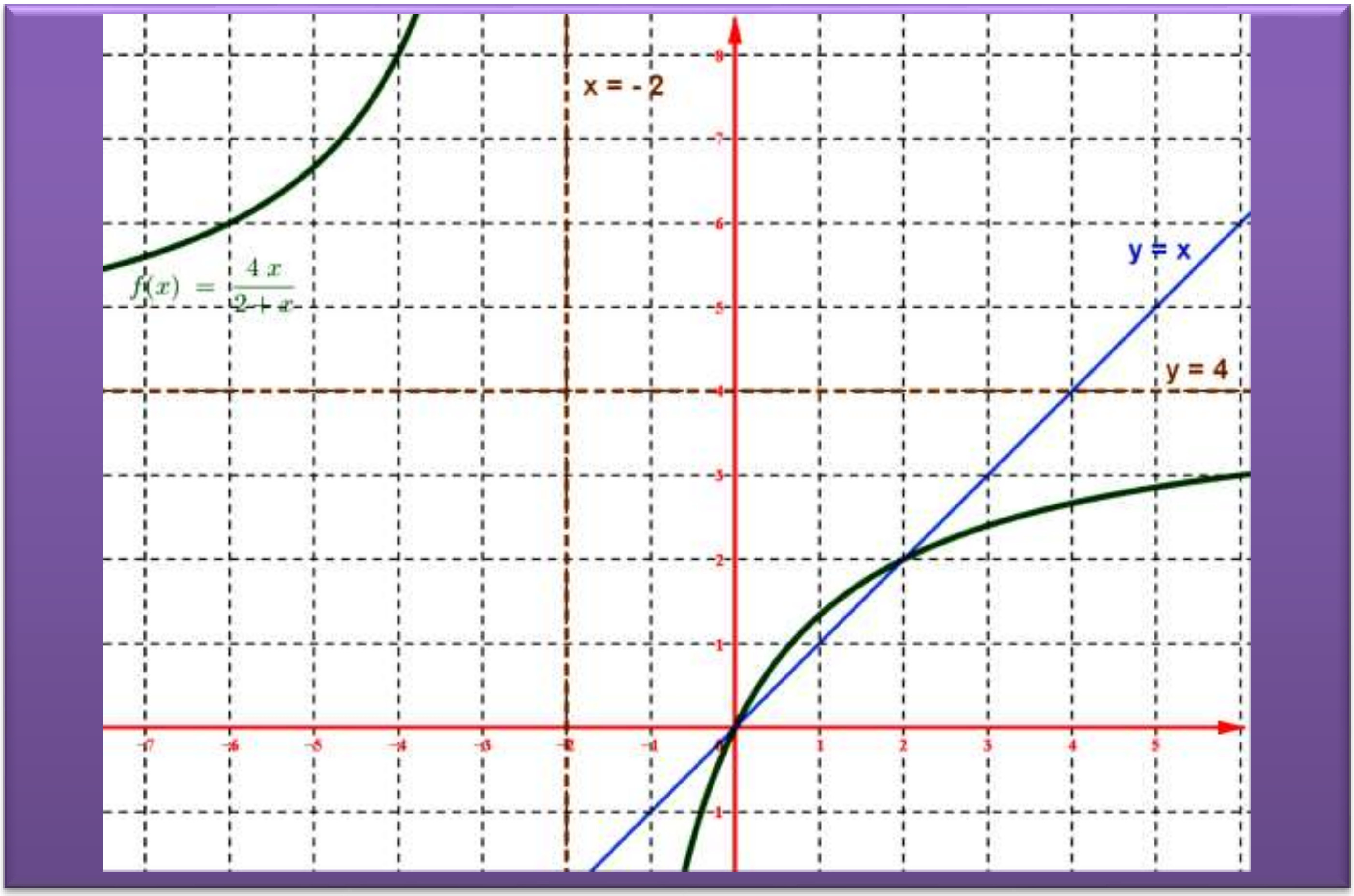
Le but de cet exercice d'étudier la convergence de (u_n) de quatre manières différentes :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2+u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1ère manière :

01. ..

- On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{4x}{2+x}$.
- (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



a. Déterminer graphiquement l'intersection de (C_f) et la droite (D) d'équation (D): $y = x$.

b. Déterminer graphiquement l'image de $I = [1,3]$ par la fonction f .

c. Placer u_0 et u_1 et u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses ; puis donner la conjecture obtenue pour l'encadrement de la suite (u_n) la monotonie de (u_n) et la limite de (u_n) .

2ième manière :

01. Calculer u_1 et u_2 .

02. Démontrer que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

03. Montrer que : (u_n) est croissante .

04. On déduit la convergence de (u_n) .

3ième manière :

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

01. Calculer : v_0.

02. Montrer que : la suite (v_n) est géométrique on détermine sa raison q .

03. Donner v_n en fonction de n

04. Donner u_n en fonction de n .

05. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; est que (u_n) est convergente .

4ième manière :

01. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq |u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$.

02. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

03. On déduit : la limite de la suite (u_n) .

02

L'espace $(\mathscr{E})$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère :

- Les points $A(1,3,-4)$ et $B(1,7,-2)$ .et $C(2,5,-2)$ et $E(3,7,-2)$ et $F(1,5,-2)$.

01. ..

a. Vérifier que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

b. Calculer : l'aire du triangle ABC.

c. Montrer que : $2x + y - 2z - 13 = 0$ est une équation du plan ABC.

02. ..

a. Montrer que la distance du point B à la droite (AC) est 2 .

b. En déduit qu'une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et tangente à la droite (AC) est $x^2+y^2+z^2-2x-14y+4z+50=0$

03.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AC) .

b. En déduit les coordonnées du point H de contact de la droite (AC) et la sphère (S) .

04. On considère la droite (D) définie par le système d'équations suivant : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{2}$ et $z=-2$

a. Donner les coordonnées du point I le milieu du segment $[EF]$.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .

c. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer leurs coordonnées .

05.

a. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par I et comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{BI}$.

b. Donner une représentation paramétrique du plan (P) .

c. Sans faire des calculs préciser position relative du plan (P) et la sphère (S) et les éléments caractéristiques de leurs intersection .

03

01. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées , z_1 étant la solution de partie imaginaire positive .

02. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2 .

03. Résoudre l'équation differentielle suivante : $y''-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)y'+9y=0$.

04. On considère dans le plan complexe (P) rapporté a un repére orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ les points A et B d'affixes respectivement $a=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $b=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

- Sans calculs expliquer pourquoi les points A et B sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 3 .

05. on considère la transformation f du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point $f(M)=M'$ d'affixe z' tel que : $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$.

a. Déterminer ω l'affixe du point Ω du plan (P) tel que $f(\Omega)=\Omega$; identifier le point Ω .

b. Montrer que : $OM=OM'$.

c. Montrer que : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

d. En déduire la nature de la transformation f et les éléments caractéristique .

06. Le but de cette question de trouver la nature de la transformation f d'une autre façon très simple .

- Donner l'écriture exponentielle de $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- En déduire une autre écriture de la transformation f puis la nature de la transformation f . (on remarque que : $z'=z'-0$ et $z=z-0$).

07. On considère les points C et D d'affixes respectivement $c=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $d=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- Déterminer c' et d' les affixes de C' et D' tel que $f(C)=C'$ et $f(D)=D'$.
- Montrer que les points C et D et C' et D' sont cocycliques .

08.

a. Calculer $\arg\left(\frac{c'}{d}\right)$ et montrer que les points C' et D sont symétrique par rapport à O .

b. En déduire la nature du triangle CDC' .

04

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

- L'urne U_1 contient trois boules blanches (B) et une boule noire (N) .
- L'urne U_2 contient une boule blanche (B) et deux boules noires (N) .
- On suppose que les boules sont indiscernables au toucher .
- Un dé non truqué avec 6 faces numérotées de 1 à 6 .
- Un notre dé truqué tel que la probabilité d'obtenir 5 est $\frac{1}{3}$.

1ère expérience :

- On lance le dé non truqué :
  - ➢ Si le dé donne un numéro d inférieur ou égale à 2 ; on tire une boule dans l'urne U_1
  - ➢ Sinon on tire une boules dans l'urne U_2 .

01. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche .

02. On a tiré une boule blanche . Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 .

2ième expérience :

- On lance le dé non truqué deux fois successives :
  - ➢ Si la somme des numéros obtenus de le premier lancer puis de le deuxième lancer est inférieure ou égale à 7 ; on tire simultanément deux boules dans l'urne U_1 .
  - ➢ Sinon on tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne U_2 .
  - ➢ On considère la variable aléatoire X définie par « le nombre des boules blanches obtenues » .

01. Calculer les probabilités des événements suivants :

- U_1 « le tirage débutera par l'urne U_1 » .
- U_2 « le tirage débutera par l'urne U_2 »

02. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par X) .

03. Montrer que : $p(X=2)=\frac{7}{24}$.

04. Donner l'arbre de probabilité qui illustre toutes les situations possibles .

05. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X et l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

3ième expérience :

On lance le dé non truqué quatre fois de suite et on désigne la variable aléatoire Y « le nombre de fois le 6 obtenus » .

01. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ?

02. Calculer la probabilité de l'événement $(Y=k)$ avec $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

03. Donner $E(Y)$ l'espérance mathématique de X et la variance de X .

4ième expérience :

On choisit au hasard l'un des deux dés , les choix étant équiprobables . Et on lance le dé choisi quatre fois de suite .

01. Calculer la probabilité des événements suivants :

A « choisir le dé non truqué et obtenir exactement deux fois 5 » .

B « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois 5 » .

02. En déduit $p(C)$ tel que C « obtenir exactement deux 5 » .

05

PARTIE 1 :

On considère :

- la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.
- Le tableau ci-contre est le tableau de variations de g .

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

01. ..

a. Calculer $g(1)$.

b. D'après le tableau , en déduit $g(x)\geq 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ puis que 1 est la seule solution de l'équation $g(x)=0$.

PARTIE 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x}\times\ln x \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 2 cm. (la construction de la courbe sera sur l'annexe 2 voir page 7)

01. ..

a. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\ln x=0$; (on peut poser $t=\sqrt{x}$) est ce que f est continue à droite de $x_0=0$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

02. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ..

03.

a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$ donner une interprétation géométrique des résultats obtenus .

b. Etudier la position relative de la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$ et la courbe (C_f) .

04. ..

a. Montrer que : f' la fonction dérivée de f sur $]0,+\infty[$ est $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.

b. On déduit le signe de f' sur $]0,+\infty[$; donner le tableau de variations de f .

c. Calculer $f'(1)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

05. ..

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .

b. Vérifier que $f(e^2) = e^2 - 2e$ puis calculer les $(f^{-1})'(e^2 - 2e)$.

c. Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

06. ..

a. Vérifier que : $\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

b. On utilise une intégration par partie , montrer que $\int_1^e \sqrt{x}\ln x\,dx = \dfrac{2e\sqrt{e}+4}{9}$.

c. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE 3 :

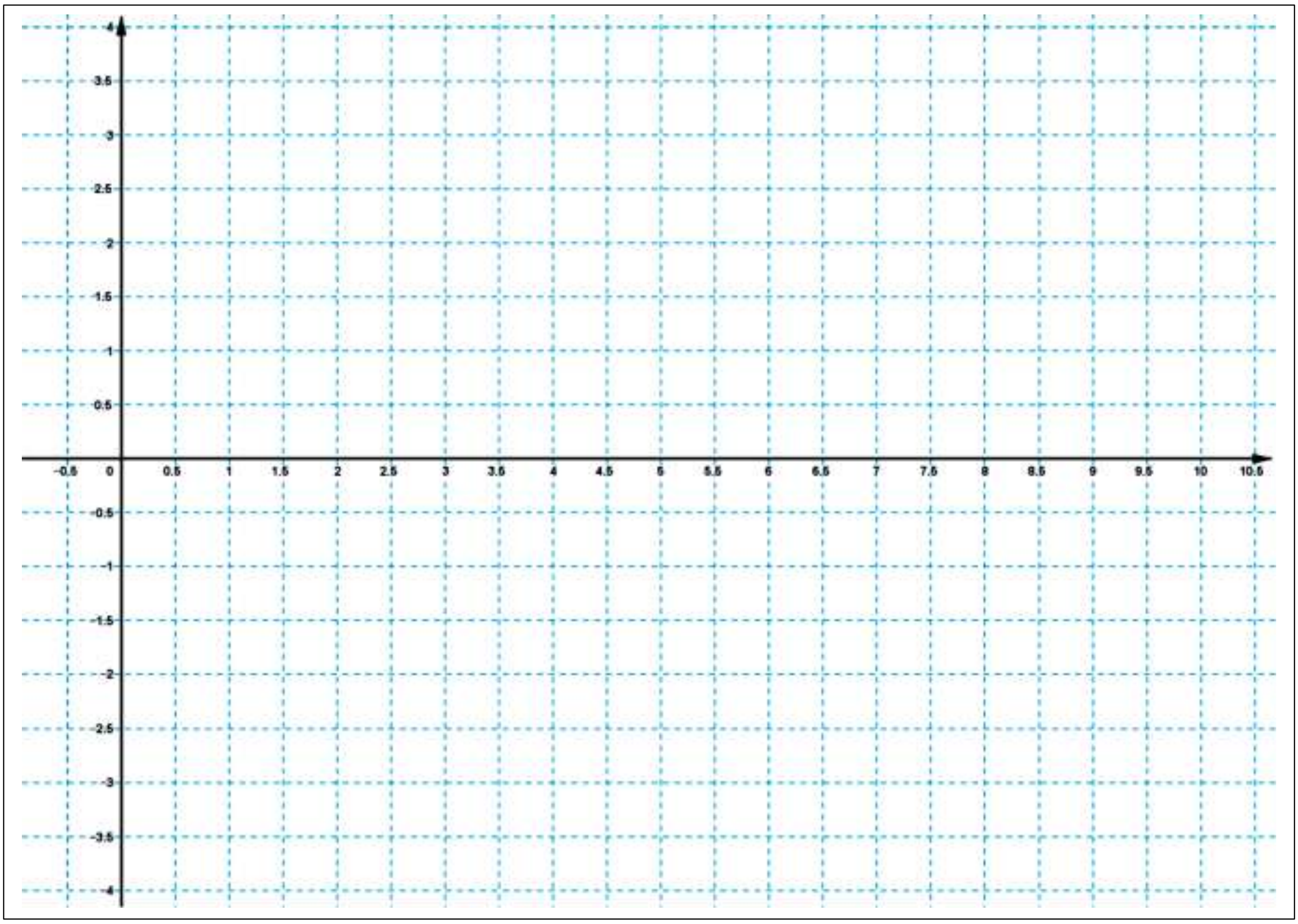
07. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).


-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5
10
10.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4