



TABLE DES MATIERES

- I. EXERCICE N° 1 : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE – SPHERE – PRODUIT VECTORIEL
- II. EXERCICE N° 2 : NOMBRES COMPLEXES .
- III. EXERCICE N° 4 : PROBABILITE .
- IV. EXERCICE N° 5 : EQUATION DIFFERENTIELLE $y' = ay + b$ FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHME ET SUITE DE LA FORME : $u_{n+1} = f(u_n)$.

01

L'espace (\mathcal{E}) étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) ; on considère :

- Les points $A(3, -1, 2)$ et $B(-1, 3, -4)$ et $\Omega(1, 1, -1)$.
- le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
- Le plan (P) passant par A et \vec{n} est un vecteur normal à (P) .
- La droite (Δ) passant par le point Ω est orthogonale à (P) .

01.

- a. Calculer : $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{B\Omega}$.
- b. Les points A et B et Ω sont alignés ?
- c. Calculer : l'aire du triangle $AB\Omega$.
- d. Donner : une équation cartésienne du plan $AB\Omega$.
- e. Donner : une équation cartésienne du plan (P) .
- f. Calculer la distance d du point Ω au plan (P) .

02.

- a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
- b. Donner un système de deux équations cartésiennes de la droite (Δ) .

03.

Déterminer les coordonnées du point H l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P) .

04.

Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace (\mathcal{E}) qui vérifie la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 8$

- a. Montrer que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 - 17$.
- b. Montrer que : l'ensemble (S) est une sphère de centre Ω et préciser son rayon R_s .
- c. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle ; déterminer son rayon et son centre .

05.

On considère la droite (D) définie par le système des équations suivantes : $x = 2$ et $z = -2$

- a. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) .
- b. Calculer la distance de Ω à la droite (D)
- c. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer leurs coordonnées .



02

- 01.** Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.
- 02.** Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 puis donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2 .
- 03.** Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 2\sqrt{3}y' + 4y = 0$.
- 04.** Le plan complexe (P) étant rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectivement $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.
- On considère : la rotation R de centre O (origine du repère) tel que : $R(A) = B$.
- a.** Déterminer un argument de $k = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- b.** Déterminer l'angle de la rotation R.
- c.** Déterminer l'écriture complexe de la rotation R.
- 05.** on considère les points C et D tel que leurs affixes respectivement sont $c = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ et $d = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i$.
- a.** Donner l'écriture exponentielle de c.
- b.** Vérifier que : le point D est l'image du point C par la rotation R.
- c.** On déduit l'écriture trigonométrie du nombre complexe d.

03

On dispose une urne U contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotés 1 ; 1 ; 1 ; 2.

I. Partie N° 1

01.

- ❖ On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
 - ❖ On considère les deux événements suivants :
 - A « Les jetons tirés ont le même numéro »
 - B « Les trois jetons tirés de couleurs différents »
- a.** Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B.
- b.** Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.
- c.** Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
- d.** Donner la probabilité de l'événement : C « Les jetons tirés ont le même numéro sachant que Les trois jetons tirés sont de couleurs différents ».

II. Partie N° 2

02.

- On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne U.
- On considère la variable aléatoire X définie par « à chaque éventualité (le résultat du tirage) on lui associe la somme des numéros des jetons tirés ».



a. Vérifier que : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$ (ensemble des valeurs prises par X).

b. Montrer que : $p(X = 5) = \frac{3}{14}$.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

III. Partie N° 3

On répète l'expérience précédente (de la 2^{ème} partie) six fois et à chaque fois on remet les jetons tirés dans l'urne U avant de répéter l'expérience .

01. Calculer la probabilité de l'événement K « l'événement $(X = 5)$ se réalise exactement deux fois lorsqu'on répète l'expérience six fois »

02. On considère la variable aléatoire Y définie par « le nombre de fois l'événement $(X = 5)$ est réalisé lorsqu'on répète l'expérience précédente (de la 2^{ème} partie) six fois »

a. Quelle loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ? on précise ses paramètres.

b. Donner l'ensemble $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs de Y).

c. Donner $p(Y = k)$ avec $k \in X(\Omega)$.

d. Calculer : l'espérance mathématique $E(Y)$; la variance $V(Y)$ et l'écart-type $\sigma(Y)$.

04

I. Partie N° 1 :

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y' - y = -2$.

01. Résoudre l'équation (E) .

02. Déterminer la fonction k qui vérifie l'équation (E) et $k(0) = 1$.

03. Vérifie que : la fonction $g(x) = x + 2 - e^x$ vérifie l'équation $(E_1) : y' - y = -1 - x$ et sans faire les calculs de $g'(x)$.

II. Partie N° 2 :

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + 2 - e^x$.

01. ..

a. Calculer et déterminer le signe de : $g(0)$ et $g(1)$ et $g(-1)$ et $g(2)$.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

c. Calculer g' la fonction dérivée de la fonction g sur \mathbb{R} .

d. Etudier le signe de g' sur \mathbb{R} . Dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R} .

02. Montrer que : l'équation $x \in \mathbb{R} : g(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que $-2 < \alpha < -1$ et $1 < \beta < 2$.

03. En déduit le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

III. Partie N° 3 :

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = xe^x + 1$.

**01.**

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et $h(0) = 1$.

02.

a. Montrer que : $h'(x) = (x+1)e^x$ pour tout x de \mathbb{R} .

b. Donner le signe de h' sur \mathbb{R} ; puis dresser le tableau de variations de h sur \mathbb{R} .

c. En déduit que : $\forall x \in [0; +\infty[; h(x) \geq 1$ et $\forall x \in]-\infty; 0] ; 0 < h(x) < 1$

IV. Partie N°4 :

• On considère la fonction h définie par $f(x) = \ln(h(x)) - x = \ln(xe^x + 1) - x$.

• (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité de mesure 2 cm

01. Montrer que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

02.

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Vérifier que : pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f(x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$. on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

03.

a. Montrer que : f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} est $f'(x) = \frac{e^x - 1}{h(x)}$.

b. Etudier le signe de f' de la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} ; donner le tableau de variations de f .

04.

a. Montrer que : f'' la fonction dérivée seconde de f sur \mathbb{R} est $f''(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(h(x))^2}$.

b. Etudier le signe de f'' puis la concavité de (C_f) sur \mathbb{R} et on précise les points d'inflexions de la courbe (C_f) .

05.

a. Démontrer que : la courbe (C_f) admet une asymptote oblique la droite (Δ) au voisinage de $-\infty$, on détermine son équation cartésienne .

b. Etudier le signe de $f(x) + x$ sur \mathbb{R} . on déduit la position relative de la courbe (C_f) et droite (Δ)

c. Construire la courbe (C_f) de f et la droite (Δ) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) unité de mesure 2 cm . (sur l'annexe voir page 5) . On admet que : $\forall x > 0 ; f(x) < x$ on donne que $f(\alpha) \approx 1,5$ et $f(\beta) \approx 0,4$.

06. Soit k la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0]$.

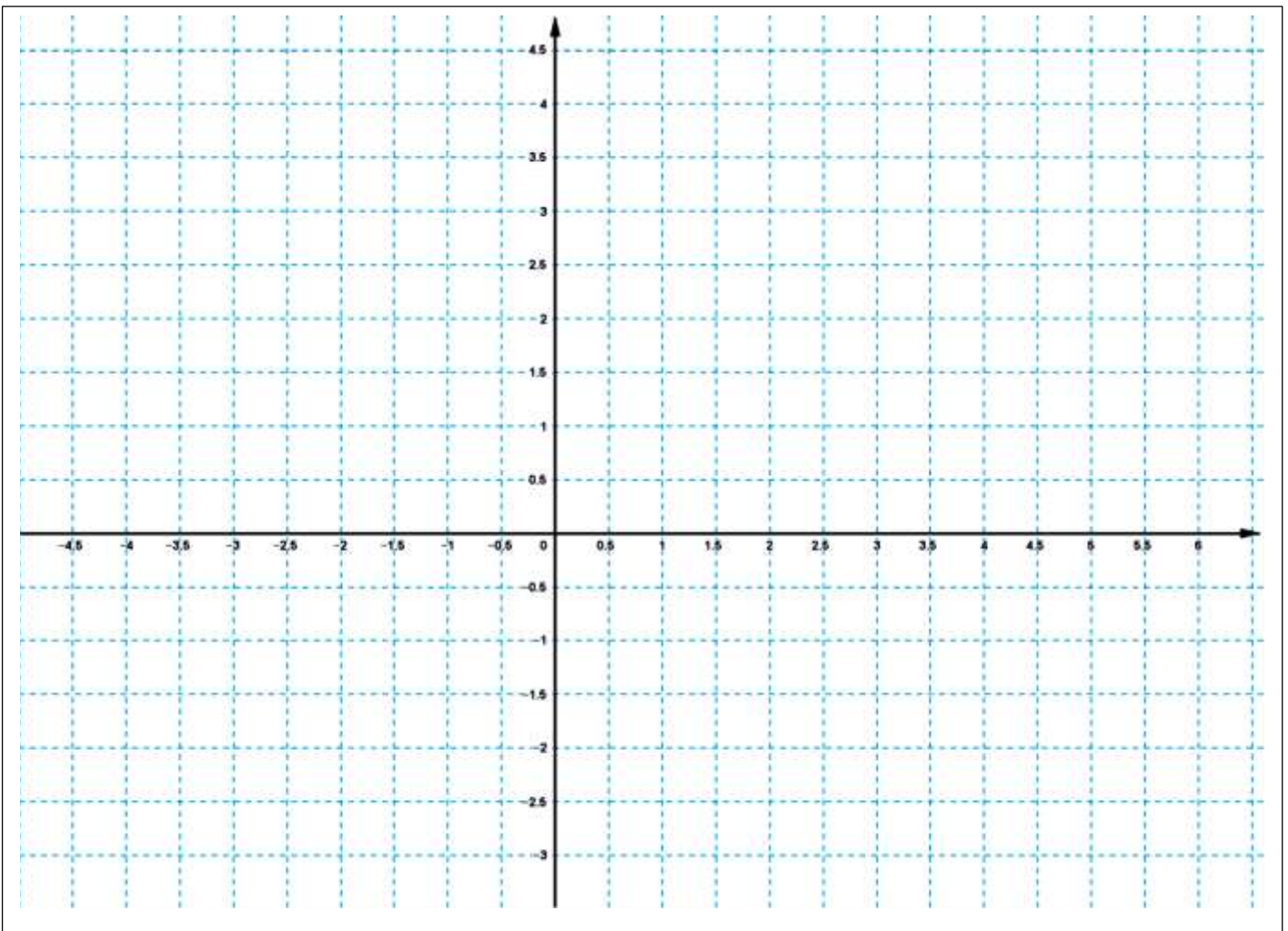


- a.** Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .
- b.** Dresser le tableau de variations de k^{-1} .
- c.** Construire la courbe $(C_{k^{-1}})$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- d.** Montrer que : $k(-1) = \ln(e-1)$; puis montrer que k^{-1} est dérivable au point $y_0 = \ln(e-1)$ et calculer $(k^{-1})'(\ln(e-1))$.

V. Partie N° 5 :

01. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- a.** Montrer que $f([0,3]) \subset [0,3]$.
- b.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$.
- c.** Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
- d.** On déduit que (u_n) est une suite convergente .
- e.** Déterminer la limite de la suite (u_n) .





- e.** Montrer que la restriction k admet une fonction réciproque k^{-1} définie sur l'intervalle J on le détermine .
- f.** Dresser le tableau de variations de k^{-1} .
- g.** Construire la courbe $(C_{k^{-1}})$ de la fonction réciproque k^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- h.** Montrer que : $k(-1) = \ln(e-1)$; puis montrer que k^{-1} est dérivable au point $y_0 = \ln(e-1)$ et calculer $(k^{-1})'(\ln(e-1))$.

VI. Partie N° 5 :

02. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- f.** Montrer que $f([0,3]) \subset [0,3]$.
- g.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$.
- h.** Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
- i.** On déduit que (u_n) est une suite convergente .
- j.** Déterminer la limite de la suite (u_n) .

