Fonction racine n-ième

EL KYAL MOHAMED

➢ Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction : $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$

elle admet une fonction réciproque définie sur $\left[0;+\infty\right[$,nommée racine n-ième

et que l'on note $\sqrt[n]{\ }$ et on a : $\forall\left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

➢ Propriétés:

$\forall\left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall\left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall\left(m;n\right) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \qquad \left(y \neq 0\right)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n\times m]{x^m}$

➢ Ensemble de définition :

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u\left(x\right)}$ est :

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \in D_u \text{ et } u\left(x\right) \geq 0\right\}$

➢ Limites:

$\lim\limits_{x \to x_0} u\left(x\right)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u\left(x\right)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➢ Continuité :

Si f une fonction définie ,positive et continue sur un intervalle I

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u\left(x\right)}$ est continue sur I

Dérivée :

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{\left[u(x)\right]^{n-1}}}$

Résolution de l'équation $x \in \mathbb{R} \qquad x^n = a \qquad (a \in \mathbb{R})$:

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a} ; \sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\right\}$	$S = \varnothing$

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

Remarques :

- $\sqrt[n]{u(x)} = \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times \left(u(x)\right)' \times \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
- $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$