

➤ **Définition :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul

La fonction  $x \mapsto x^n$  est continue et strictement monotone sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

elle admet une fonction réciproque définie sur  $[0; +\infty[$ , nommée racine n-ième

et que l'on note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  et on a :  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

➤ **Propriétés:**

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

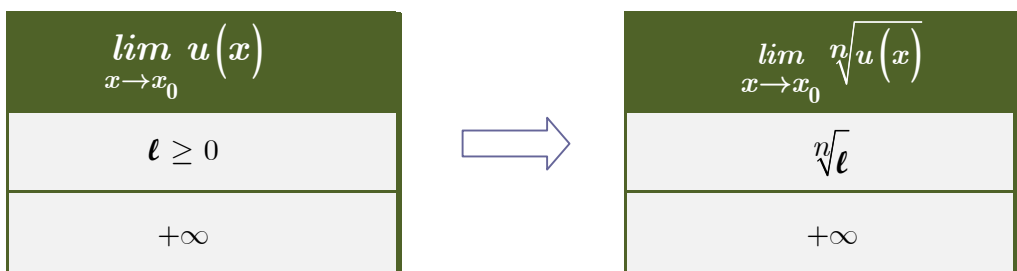
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$

➤ **Ensemble de définition :**

L'ensemble de définition de la fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0 \right\}$$

➤ **Limites:**



Ces résultats restent valable, à droite en  $x_0$ , à gauche en  $x_0$ , en  $+\infty$  et en  $-\infty$

➤ **Continuité :**

Si  $f$  une fonction définie, positive et continue sur un intervalle  $I$

alors la fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est continue sur  $I$

➤ **Dérivée :**

Si  $u$  une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$   
alors la fonction :  $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est dérivable sur  $I$

et on a :  $\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$

➤ **Résolution de l'équation**  $x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \quad (a \in \mathbb{R}) :$

	$n$ un entier naturel impair	$n$ un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$S = \emptyset$

➤ **Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:**

Soit un  $x$  réel strictement positif et un  $r$  nombre rationnel

On pose  $r = \frac{p}{q}$  ( $p \in \mathbb{Z}^*$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ )

On a :  $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

➤ **Remarques :**

- $\sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels  $x$  et  $y$  positifs et pour tous rationnelles  $r$  et  $r'$

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(x \times y\right)^r = x^r \times y^r$
- $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$