

La fonction racine d'ordre n { la racine n^{ième} } (n ∈ ℕ*)

Les puissances radicales

Prof. Smail BOUGUERCH

Propriété et définition:

La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur \mathbb{R}^+ admet une fonction réciproque nommée la fonction racine d'ordre n ou racine n^{ième} et qui est notée : $\sqrt[n]{}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2; \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

Cas particuliers:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ (racine carrée)
- Le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cube de x

Propriétés:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2; \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}; y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$

Remarque importante (le conjugué):

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition D _f est :
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

Les limites:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$l \geq 0$	$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$	$+\infty$



Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+

Si u est une fonction positive et continue sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

$$\text{Et on a : } \forall x \in]0; +\infty[; \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I

$$\text{Et on a : } \forall x \in I; \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$$

Résolution de l'équation $x^n = a$ avec ($x \in \mathbb{R}$) et ($a \in \mathbb{R}$):

	n est pair	n est impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Les puissances radicales d'un réel strictement positif:

Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0; +\infty[; x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Remarques:

- $\forall x \in]0; +\infty[; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Si f est une fonction numérique à variable réelle x définie comme suit : ($r \in \mathbb{Q}^*$); $f(x) = [u(x)]^r$
Alors son domaine de définition est : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$.
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tout x et y de \mathbb{R}_+^* et pour tout r et r' de \mathbb{Q}^*

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

$$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} = \left(x^{r'}\right)^r$$

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$$