# I. La fonction exponentielle népérienne $f(x)=e^x$ :

## a. Activité :

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)=\ln x \end{cases}$

1. Est-ce que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ ?

## b. Vocabulaire et notation :

fonction réciproque $f^{-1}$ de $f$ est appelée la fonction exponentielle népérienne ( ou la fonction exponentielle , on note $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$ .

## c. Définition et propriété :

La fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)=\ln x \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ d'où $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$, on l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par : $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$ avec $\begin{aligned} f^{-1}=\exp : \mathbb{R} &\to ]0,+\infty[ \\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\exp(x) \end{aligned}$.

## d. Conséquences :

- La fonction exponentielle népérienne $f^{-1}=\exp$ ou $f^{-1}=e$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la courbe de $f$ et $f^{-1}$ .sont symétrique par rapport à la 1ière bissectrice ( la droite d'équation $(D) : y=x$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ , $\exp(x)>0$.
- Relation entre $f(x)=\ln(x)$ et $f^{-1}(x)=\exp(x)$ est $\left.\begin{matrix} \exp(x)=y \\ x\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln(y) \\ y>0 \end{cases}$.
- On a : $\forall x\in ]0,+\infty[ : f^{-1}\circ f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=x$ donc

  $\forall x\in ]0,+\infty[$ , $\exp\circ\ln(x)=x \Leftrightarrow \exp(\ln(x))=x$
- On a : $\forall x\in\mathbb{R} : f\circ f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=x$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$ , $\ln\circ\exp(x)=x \Leftrightarrow \ln(\exp(x))=x$

## e. Nouvelle notation :

On sait que : $(1)$ : $\forall r\in\mathbb{Q}$ , $r=\ln(e^r)$ d'ou

$(1) \Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}$ , $\exp(r)=\exp(\ln(e^r)) \Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}$ , $\exp(r)=e^r$

On obtient : $\forall r\in\mathbb{Q} : \exp(r)=e^r$ par conséquence on va prolonger ce résultat à tous les nombres réels $x$ .

d'où la nouvelle notation : $\forall x\in\mathbb{R} : \exp(x)=e^x$.

Donc : $\begin{aligned} f^{-1}=\exp : \mathbb{R} &\to ]0,+\infty[ \\ x &\mapsto f^{-1}(x)=\exp(x)=e^x \end{aligned}$

**f. Propriétés :**

1. $\left.\begin{matrix} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{matrix}\right.$ et $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
2. $\forall a,b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$ et $\forall a,b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$.

**g. Exemples :**

1. $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3$
   $\Leftrightarrow x = \ln 3$
2. $e^{\ln(24)} = 24$ et $\ln(e^{-13}) = -13$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $e^{x+3} = e^{2x+7}$.
   On a : $e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x + 3 = 2x + 7 \Leftrightarrow x - 4$
   Ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-4\}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x+1} < e^{6x-2}$.
   On a : $e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x + 1 < 6x - 2$
   $\Leftrightarrow -5x < -3$
   $\Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$
   $\Leftrightarrow x \in \left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$
   Ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$.
5. Ensemble de définition des fonctions : $f(x) = \frac{2}{e^x}$ et $g(x) = \sqrt{e^x}$
   - $x \in D_f \Leftrightarrow e^x \neq 0$ ceci est vrai quelque soit x de $\mathbb{R}$ car $e^x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
   - $x \in D_f \Leftrightarrow e^x \geq 0$ on sait quelque soit x de $\mathbb{R}$ on a $e^x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

## II. Propriétés algébriques :

**a. Propriétés :**

Soient a et b et x de $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

| propriétés | Exemples | | propriétés | Exemples | |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{a+b} = e^a \times e^b$ | $e^7 = e^4 \times e^3$ | 1 | $(e^x)^r = e^{rx}$ $(r \in \mathbb{Q})$ | $(e^x)^3 = e^{3x}$ | 4 |
| $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ | $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ | 2 | $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$ | $\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$ | 5 |
| $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | $e^5 = \frac{e^7}{e^2}$ | 3 | $\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$ | $\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$ | 6 |

**b.** **Preuve : pour** $e^{a+b}=e^a\times e^b$ .

On pose : $A=e^{a+b}$ et $B=e^a\times e^b$

On a :

$$A=e^{a+b}\Leftrightarrow \ln(A)=\ln\left(e^{a+b}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(A)=a+b \quad , \quad (1)$$

Et : $B=e^a\times e^b\Leftrightarrow \ln(B)=\ln\left(e^a\times e^b\right)$

$$\Leftrightarrow \ln(B)=\ln\left(e^a\right)+\ln\left(e^b\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B)=a+b \quad , (2)$$

D'après $(1)$ et $(2)$ on obtient : $\ln(A)=\ln(B)$ donc $A=B$ c.à.d. $e^{a+b}=e^a\times e^b$ .

**Conclusion :** $e^{a+b}=e^a\times e^b$ .

**c.** **Remarques :**

- $e^x\times e^x=\left(e^x\right)^2=e^{2x}$ et $e^x\times e^x\times e^x=\left(e^x\right)^3=e^{3x}$ .
- $\underbrace{e^x\times e^x\times\cdots\times e^x}_{n}=\left(e^x\right)^n=e^{nx}$ .
- $f(x)=e^{u(x)}$ , $x\in D_f\Leftrightarrow x\in D_u$

## III. Limites :

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty}x\times e^x=0^-$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\times e^x=0$ ; $n\in\mathbb{N}^*$ | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ ; $n\in\mathbb{N}^*$ | |

**a.** **Exemple :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$ :

1ère méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\times e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\times e^x=+\infty$ .

2ième méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}\left(t=2x\ ;\ x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty\right)$$
$$=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2x}{x^3}$ :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}=+\infty$ ( car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ )

## IV. Dérivée de la fonction $f(x)=e^{x}$ et $f(x)=e^{u(x)}$ .

**a. Théorème :**

la fonction $f(x)=e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^{x})'=e^{x}$ .

**b. Preuve :**

On pose : $f(x)=\ln(x)$ et $f^{-1}(x)=\exp(x)$ .

La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'(x)=\frac{1}{x}$ qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ donc sa fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ (e^{x})'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\frac{1}{f'(e^{x})}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}}=e^{x}.$$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^{x})'=e^{x}$ .

**c. Théorème :**

Si la fonction $u(x)$ est dérivable sur un intervalle $I$ alors la fonction $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$ et sa fonction dérivable est $f'(x)=\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$ .

**d. Exemple :**

Soit la fonction $f(x)=e^{5x^{3}+3x}$

On a : $f'(x)=\left[e^{5x^{3}+3x}\right]'=(5x^{3}+3x)'\times e^{5x^{3}+3x}=(15x^{2}+3)e^{5x^{3}+3x}$.

**e. Remarque :**

Les fonctions primitives de la fonction $g(x)=u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $G(x)=e^{u(x)}+c$ ; $(c\in\mathbb{R})$ .

**f. Exemple :**

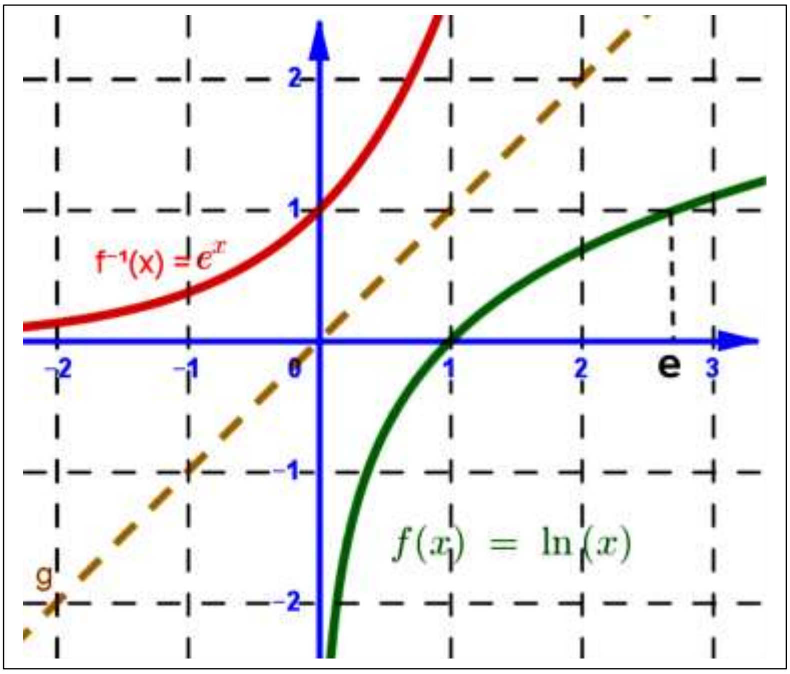
On détermine les primitives de la fonction $f(x)=x.e^{3x^{2}+1}$ sont les fonctions de la forme $F(x)=\frac{1}{6}e^{3x^{2}+1}+c$

## V. Etude de la fonction $f(x)=e^{x}$ :

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'$ | $+$ |
| $f$ | $0 \nearrow +\infty$ |

La courbe représentative de $f$




# VI. Fonction exponentielle de base a avec $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ :

## a. Définition :

Soit $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ .

La fonction définie par : $\forall x > 0$ , $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$

donc elle admet une fonction réciproque $f^{-1}$, on l'appelle fonction exponentielle de base a et définie par :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to ]0,+\infty[ \quad x \mapsto f^{-1}(x) = \exp_a(x)$$

## b. Nouvelle notation :

- On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \log_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \\ &\Leftrightarrow y = e^{x\ln(a)} \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(x) = \exp_a(x) = e^{x\ln a}$

- On prend $x = r \in \mathbb{Q}$ on a : $f^{-1}(r) = \exp_a(x) = e^{r\ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$ d'où : $\exp_a(x) = a^r$ .
- On prolonge cette écriture pour tous les nombres réels x de $\mathbb{R}$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f^{-1}(x) = e^{x\ln a} = a^x$ .

• **Conclusion :**

• $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^{x\ln a} = a^{x}$ .

**c. Exemple :**

$5^{x} = e^{x\ln 5}$ et $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x} = e^{-x\ln 5}$ et $10^{x} = e^{x\ln 10}$.

**d. Remarques :**

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\log_a\left(a^{x}\right) = x$.

• Pour tout $x > 0$ on a : $a^{\log_a(x)} = x$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $10^{x} = y \Leftrightarrow x = \mathrm{Log}(y)$.

**e. Conséquences :**

Soit $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ et la fonction $f(x) = a^{x} = e^{x\ln a}$ .

1. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ .
2. $[f(x)]' = \left(a^{x}\right)' = (\ln(a)) \times e^{x\ln a} = (\ln(a)) \times a^{x}$.
3. D'où le signe : $[f(x)]' = \left(a^{x}\right) = (\ln(a)) \times a^{x}$ est le signe de $\ln a$.
   - $0 < a < 1$ alors $f(x) = a^{x} = e^{x\ln a}$ strictement croissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^{x} < a^{y} \Leftrightarrow x > y$ .
   - $a > 1$ alors $f(x) = a^{x} = e^{x\ln a}$ strictement décroissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^{x} < a^{y} \Leftrightarrow x < y$ .

**f. Propriétés :**

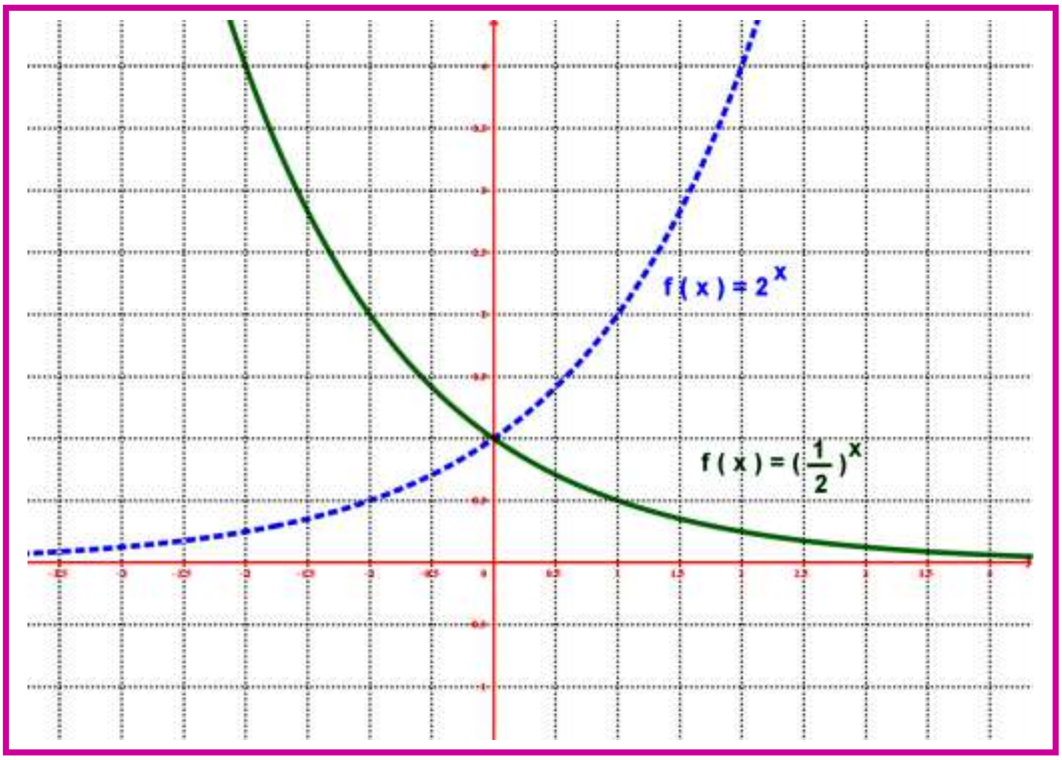
$a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ , $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$ et $\left(a^{x}\right)^{y} = a^{x\times y}$ et $\dfrac{1}{a^{x}} = a^{-x}$ et $\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$.

**g. La courbe représentative de $f(x) = a^{x}$ avec $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ .**

Cas $0 < a < 1$ on prend $a = \dfrac{1}{2}$ donc $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$.

Cas $a > 1$ on prend $a = 2$ donc $f(x) = 2^{x}$ .




**h. Exemple :**

1. Ecrire la fonction $f(x) = 3^{x^3 - x}$ en fonction de la fonction exponentielle népérienne .
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .
3. Calculer : $f'$ la fonction dérivée de $f$ .

**Correction :**

1. **On écrit la fonction $f$ :**

On a : $f(x) = 3^{x^3 - x} = e^{(x^3 - x)\ln 3}$ .

2. Les limites :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(x^3 - x)\ln 3} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x)\ln 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$ .
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{(x^3 - x)\ln 3} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x)\ln 3 = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$ .

3. Dérivée :

On a : $d = f'(x) = \left(e^{(x^3 - x)\ln 3}\right)' = \left((x^3 - x)\ln 3\right)' \times e^{(x^3 - x)\ln 3} = \left((3x^2 - 1)\ln 3\right) \times e^{(x^3 - x)\ln 3}$ .