

FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

La fonction \ln est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Propriété et définition :

La fonction \ln admet une fonction réciproque définie de $]-\infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ appelée fonction Exponentielle népérienne notée : \exp

Propriétés :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\ln(\exp(x)) = x)$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exp(\ln(x)) = x)$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R})(\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y))$
- 4) $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$

Propriété : (monotonie) : La fonction \exp est continue strictement croissante sur \mathbb{R} .

Résultat :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) \leq \exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exemple : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) \exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad 2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

Solution : 1) $\ln(x-2) = 0$

a) cette équation est définie ssi : $2x+3 \neq 0$ et

$$x-1 \neq 0 \text{ donc : } x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 1 \text{ donc : } D_E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-8) \times 1 = 4 + 32 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-2-6}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Donc : $S = \{-4; 2\}$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

a) cette inéquation est définie ssi : $x \neq 0$ donc : $D_I = \mathbb{R}^*$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$3/2$	$+\infty$
$2x+x-6$	$-$	0	$+$	$+$	0
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$q(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0

$$S =]-\infty, -2] \cup \left]0, \frac{3}{2}\right[$$

2) l'écriture : e^x

Notation : Pour tout x dans \mathbb{R} on note : $\exp(x) = e^x$

Propriété algébrique :

Pour tout x et y dans \mathbb{R} on a :

$$1) e^{x+y} = e^x \times e^y \quad 2) e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad 3) e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$4) e^{rx} = (e^x)^r \quad (r \in \mathbb{Q}) \quad 5) (e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$$

$$6) (\ln(e^x) = x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$7) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x = y) \Leftrightarrow (x = \ln y)$$

$$8) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x = e^y) \Leftrightarrow (x = y)$$

$$9) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x \geq e^y) \Leftrightarrow (x \geq y)$$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) e^{1-x} \times e^{2x} = e$$

$$2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad 4) e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$$

$$5) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$$

Solution :1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x+1-x} = e^1$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ donc : } S = \{0\}$$

$$2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Donc : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \text{ on pose : } e^x = X$$

Donc : $X^2 - 5X + 6 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$

$$X_1 = \frac{5+1}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} \text{ donc : } X_1 = 3 \text{ et } X_2 = 2$$

Donc : $e^{x_1} = 3$ et $e^{x_2} = 2$ donc : $x_1 = \ln 3$ et $x_2 = \ln 2$

Donc : $S = \{\ln 2, \ln 3\}$

4) cette équation est définie dans \mathbb{R}

$$e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot e^{3x} = e^{-5x} \cdot e^{-7}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+3x} = e^{-5x-7} \Leftrightarrow x^2 + 3x = -5x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 7 \times 1 = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-8+6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-8-6}{2 \times 1} = \frac{-14}{2} = -7$$

Donc : $S = \{-7; -1\}$

5) cette équation est définie dans \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow e^{-3} (e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3 < 0 \text{ car } e^{-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (e^2 + e)e^x + e^3 < 0$$

On pose : $e^x = t$ on aura : $t^2 - (e^2 + e)t + e^3 < 0$

$$t^2 - (e^2 + e)t + e^3 = (t-e)(e^x - e^2)$$

$$2) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - e^1)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; 2[\text{ donc : } S =]1; 2[$$

Propriété : (limites usuelles)

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

Preuve : ces limites se déduisent des limites de La fonction \ln

Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ avec : $n \in \mathbb{N}^*$?

$$\text{On a : } \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(\frac{x}{e^n}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{\frac{x}{e^n}}{x}\right)^n = \frac{1}{n^n} \left(\frac{\frac{x}{e^n}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

on pose : $t = \frac{x}{n} \quad x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^t}{t}\right)^n \text{ on a } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Montrons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ avec : $n \in \mathbb{N}^*$?

on pose : $t = -x$ donc $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{t^n}{e^t} = 0 \text{ car :}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^t} = +\infty$$

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

Solution :1) $\frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$ on pose : $t = \sqrt{-x}$

donc $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{10} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^{10}}{e^t} = 0$

3) on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1$ (on pose : $t = \sin x$) et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

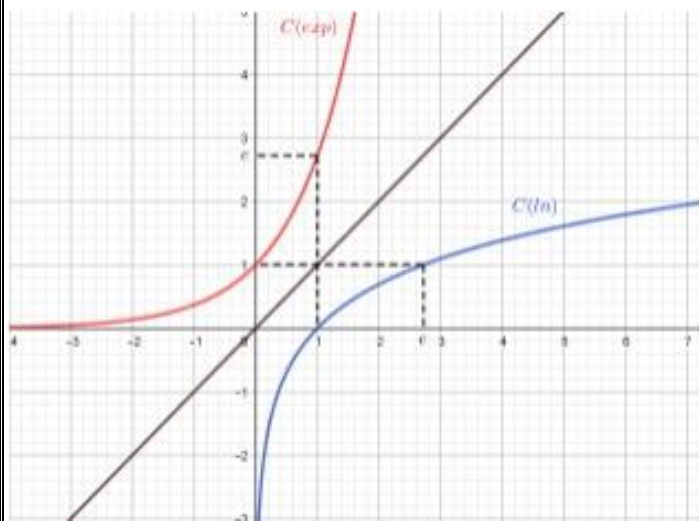
4) On pose : $f(x) = e^{x+1}$ donc : $f(0) = e^{0+1} = e^1 = e$

Et : $f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1e^{x+1} = e^{x+1}$ et $f'(0) = e$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$

3) Représentation de la fonction exp

La fonction exp est strictement monotone sur \mathbb{R}
Car l'exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est strictement monotone sur $]0, +\infty[$
Les courbes C_{\ln} et C_{\exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y = x$



Le Tableau de variation et L'exp :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp(x)	0	1	e	$+\infty$

4) Dérivation de la fonction exp

On sait que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et on sait que : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R} = \ln(]0, +\infty[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$$

Car : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ avec $f = \ln$ et $\ln^{-1} = \exp$

Propriété : La fonction exp est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'(x) = \exp(x))$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\exp(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(\exp(u(x)))' = u'(x) \exp(u(x))$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions

suivantes : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ 3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

Solutions : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1 : x \rightarrow \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } u_1'(x) = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Donc la fonction f est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} e^{\sqrt{2x+1}}$$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1 : x \rightarrow -2x^2$ et $u_2 : x \rightarrow 3x+1$ sont dérivables sur \mathbb{R} et on a :

$$u_1'(x) = -4x \text{ et } u_2'(x) = 3$$

Donc la fonction g est dérivable sur \mathbb{R}

et $g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$

3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$ la fonction : $u : x \rightarrow \frac{x+1}{-x+3}$

est dérivable sur $]3; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$ et $u'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3; +\infty[$ et

$]-\infty; 3[$ et $h'(x) = \frac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})'$

$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5) Primitives et la fonction exp

Corolaire : Si u est une fonction dérivable alors une primitive de $u'(x) \cdot e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions

suivantes : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 3) $g(x) = (e^x)^2$

Solutions : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$

On a : $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = (e^x)^2$ Si on pose : $u(x) = e^x$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

sont : $G(x) = \frac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \frac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice1 : Déterminer une primitive des

fonctions suivantes : 1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x(e^x - 1)^3$

4) $I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$

Solutions : 1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$

$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ est une primitive de f sur I

2) $I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$

Donc : $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1}$ est une primitive de f sur I

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x(e^x - 1)^3$

$f(x) = e^x(e^x - 1)^3 = (e^x - 1)'(e^x - 1)^3$

donc : $F(x) = \frac{1}{3+1}(e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4}(e^x - 1)^4$ est une primitive de

f sur I

4) $I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$

donc : $F(x) = e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$

donc : $F(x) = \ln|e^x - x|$ est une primitive de f sur I

6) Etudes des fonctions qui contiennent exp

Exemple1: Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

3) Etudier la concavité de la courbe C_f

4) Construire la courbe C_f .

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Donc : $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$$

$$f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		\searrow	\nearrow
		-1	

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) Etude de la concavité de la courbe C_f :

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

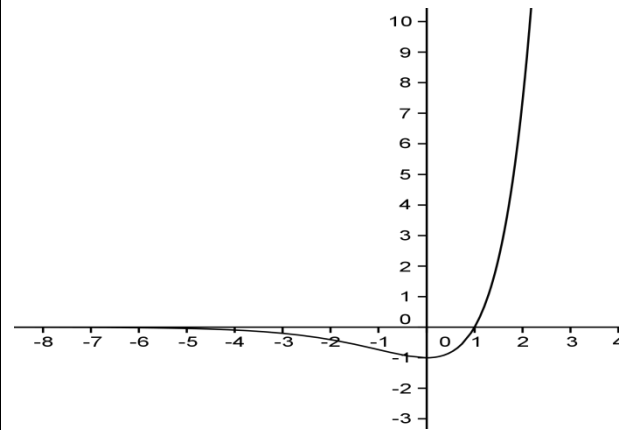
Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1; +\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty; -1]$ et $A(-1, -2e^{-1})$ est un

point d'inflexion de (C_f)

4)



Exemple2: Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x-1 + \frac{3}{e^x+1}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x+2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Et étudier la position de la courbe C_f avec les asymptotes obliques

Solutions :

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$$

$$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \quad \text{pas de solutions car } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 + \frac{3}{e^x+1} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3$

2) $f'(x) = \left(x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $(e^x)^2 - e^x + 1$

On pose : $e^x = X$ donc on a : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$

Donc : $X^2 - X + 1 > 0$ (signe de a)

Donc : $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$ par suite: $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$

$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$

$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

4) Etude des branches infinies ?

a) On a $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$

Par suite : la droite d'équation $(\Delta) y = x - 1$ est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage

de $+\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$

Donc : la courbe C_f est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta) y = x - 1$

b) On a $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$

Par suite : la droite d'équation $(D) y = x + 2$ est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage

de $-\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$

Donc : la courbe C_f est au-dessous de la droite d'équation $(D) y = x + 2$

Exemple3: Considérons la fonction f définie par :

$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7) calculer : $f(2 \ln 2)$ et construire la courbe C_f .

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \geq 0\}$

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^+$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$

$$2) \frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x} = \frac{(e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})^2}{x\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{x\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 4 = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe C_f admet une demi tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad (+) \times (-) = (-)$$

$$4) \text{ montrons que : } (\forall x \in \mathbb{R}^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}} ?$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = (e^x - 4)' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + \frac{e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{e^x - 1})^2 + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) le signe de : $f'(x)$ est celui de $e^x - 2$

$$\text{car } \frac{3e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 4)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2 - 4)\sqrt{2 - 1} = -2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

6) Etude des branches infinies de la courbe C_f
Au voisinage de $+\infty$?

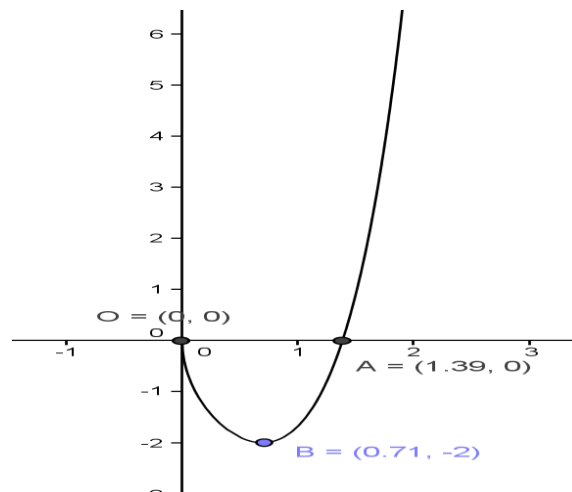
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} \right) \sqrt{e^x - 1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc : la courbe C_f admet

une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$f(2\ln 2) = (e^{2\ln 2} - 4)\sqrt{e^{2\ln 2} - 1} = (e^{\ln 4} - 4)\sqrt{e^{\ln 4} - 1} = (4 - 4)\sqrt{4 - 1} = 0$$



Exercice2 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f .

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} - e^{-2x} \geq 0\}$

$$e^{-x} - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow -x \geq -2x \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}(1 - e^{-x})}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}}{x} \times \frac{e^{-x} - 1}{-x}} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe C_f admet une demi tangente verticale adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad (+) \times (+) = (+)$

3) Etude des variations de f :

$$f'(x) = (\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}})' = \frac{(e^{-x} - e^{-2x})'}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} + 2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2} = \frac{e^{-x}(2e^{-x} - 1)}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x} - 1$

car $\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

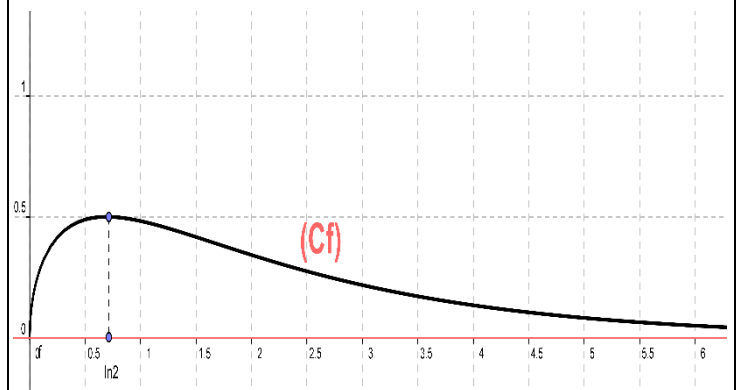
on a : $2e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x}(2 - e^x)$

$$2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

$$f(\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{2\ln 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$

4) la courbe C_f :



Exercice3 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$$

$$1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow e^0 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$$

Donc : $D_f =]-\infty, 0[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)}} = +\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0^+$

$$2) f'(x) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} - e^x \frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} = \frac{2e^x(1-e^{2x}) + 2e^x e^{2x}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2e^{3x} + 2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} = \frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} > 0$$

$\forall x \in]-\infty, 0[$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement

croissante sur $I =]-\infty, 0[$ donc f admet une

fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = f(I) = f(]-\infty, 0[) =]0; +\infty[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} = x \\ y \in]-\infty, 0[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} \right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} = x^2$$

$$e^{2y} = x^2(1-e^{2y}) \Leftrightarrow e^{2y} = x^2 - x^2 e^{2y} \Leftrightarrow e^{2y} + x^2 e^{2y} = x^2$$

$$e^{2y}(1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Donc: $f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \forall x \in]0; +\infty[$

Exercice4 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

1)a) montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et interpréter

géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2)a) vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x + 1$

est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe C_f avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de C_f

d) montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

1)a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Interprétation géométriquement :

$y = 1$ est une asymptote a(C) au voisinage de $+\infty$

1)b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

2)a) Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$?

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1 - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) = 1 - \ln(e^x + 1) + x$$

Donc: $f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2)b) on a : $f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1)$

Donc : $f(x) - (x + 1) = -\ln(e^x + 1)$

Donc: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(e^x + 1) = 0$ car: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Par suite : la droite d'équation (D): $y = x + 1$ est

une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

2)c) $f(x) - (x + 1) = -\ln(e^x + 1)$

On a : $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc : $e^x + 1 > 1$

Donc: $\ln(e^x + 1) > \ln 1$ Donc: $\ln(e^x + 1) > 0$

Donc: $-\ln(e^x + 1) < 0$

Donc : la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation (D): $y = x + 1$

3)a) montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$?

$$f'(x) = (x + 1 - \ln(1 + e^x))' = 1 - \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3)b) Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	1

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1 + e^x}\right)' = -\frac{(1 + e^x)'}{(1 + e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la courbe Cf est convexe dans \mathbb{R} ,

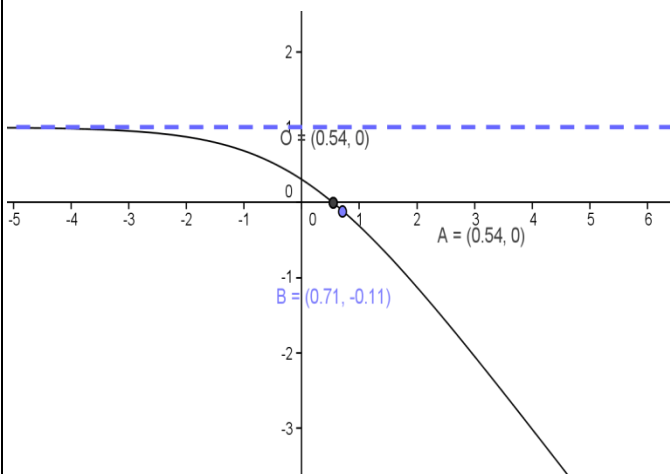
3)d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(1 + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) = 1$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) = \ln e \Leftrightarrow e^{-x} = e - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(e - 1)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(e - 1)$$

Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$A(-\ln(e - 1); 0)$



5) a) on a f est une fonction continue et

strictement croissante sur \mathbb{R} donc f admet une

fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle

$$J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty; 1[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \ln(1 + e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - x = \ln(1 + e^{-y}) \Leftrightarrow 1 + e^{-y} = e^{1-x}$$

$$e^{-y} = e^{1-x} - 1 \Leftrightarrow -y = \ln(e^{1-x} - 1) \Leftrightarrow y = -\ln(e^{1-x} - 1)$$

Donc: $\forall x \in]-\infty; 1[\quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x} - 1)$

Exercice5 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^+

par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
- 2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 3) Déterminer la limite en $+\infty$
- 4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .

5) a) Montrer que $(\forall t > 0) \quad 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

- c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
- 6) Construire la courbe C_f .

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \quad \text{si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n

puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a .

1) Définition et résultats :

Propriété et définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction \log_a étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de

$$\mathbb{R} = \log_a (]0, +\infty[) \text{ vers }]0, +\infty[.$$

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note \exp_a

Propriété : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp_a(x) = e^{x \ln a}$$

Preuve : Posons : $y = \exp_a(x)$

$$\text{on a donc } y > 0 \text{ et } x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

D'où : $\ln y = x \ln a$; finalement $y = e^{x \ln a}$

D'où la propriété.

Résultats immédiats : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

fonction \exp_a est définie sur \mathbb{R}

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) > 0$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a(\exp_a(x)) = x$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp_a(\log_a(x)) = x$$

Propriété caractéristique :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$$

Conséquences :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ et x et y deux réels, on a :

$$1) \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} \quad 2) \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$$

$$3) \exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

Propriété : \exp_a est dérivable sur \mathbb{R}

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exp_a(x))' = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

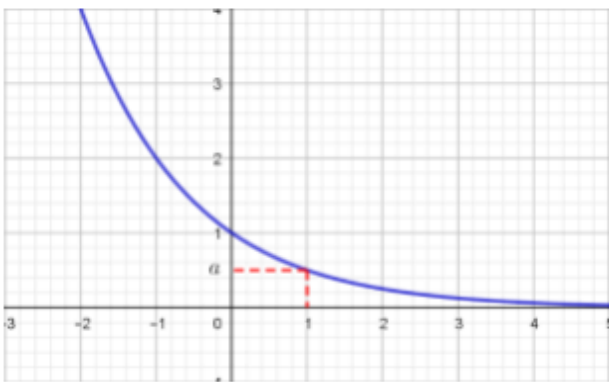
Monotonie et étude et représentation :

Si $0 < a < 1$:

On a $\ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exp'_a(x) < 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	-	-	-	-
$\exp_a(x)$	$+\infty$	1	a	0

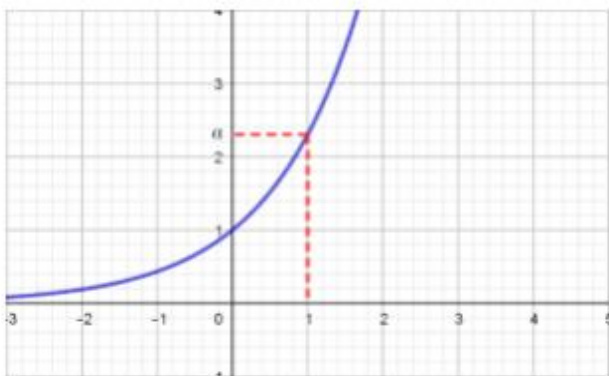


Si $0 < a < 1$:

On a $\ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exp'_a(x) > 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	+	+	+	+
$\exp_a(x)$	0	1	a	$+\infty$



2) Une autre écriture de la fonction \exp_a et Les puissances réelles.

Rappelle :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) (x^0 = 1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_n : n \text{ fois})$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (x^{-n} = \frac{1}{x^n})$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall r \in \mathbb{Q}) (x^r = \sqrt[r]{x^p}) (q \in \mathbb{N}^*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

1) Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $1^x = 1$

2) Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x \ln a}$

Propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}^*+) (\forall b \in \mathbb{R}^*+) (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R})$

1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

2) $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

3) $(a^x)^y = a^{x \times y}$ 4) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $(a^x)' = a^x \times \ln a$

a) $x \rightarrow a^x$ est strictement croissante si $a > 1$

b) $x \rightarrow a^x$ est strictement décroissante si $0 < a < 1$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x \ln 5} = 15 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$$

Donc : $S = \left\{ \frac{\ln 15}{\ln 5} \right\}$..

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$

$$\Leftrightarrow 2x \ln 3 \geq (1-x) \ln 5 \Leftrightarrow x(2 \ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$$

Donc : $S = \left[\frac{\ln 5}{2 \ln 3 + \ln 5}; +\infty \right[$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} < 6$ on a $7^x > 0$

$$7^{2x+1} - 1 < 6 \times 7^x \Leftrightarrow 7 \times (7^x)^2 - 6 \times 7^x - 1 < 0$$

on pose : $t = 7^x \Leftrightarrow 7t^2 - 6 \times t - 1 < 0$

on a : $7t^2 - 6 \times t - 1 = (t-1)(7t+1)$

$$7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7 \times 7^x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) < 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 < 0 \text{ car } 7^{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 7^x < 1 \Leftrightarrow 7^x < 7^0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ car } x \rightarrow 7^x \text{ est}$$

strictement croissante ($7 > 1$) donc : $S =]-\infty; 0[$

Exercice6 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Solution : 1) $2^{x+1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{3x}$

$$x+1 = 3x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x \text{ donc : } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

2) $3^x = 12 \Leftrightarrow x = \log_3 12$ donc : $S = \{ \log_3 12 \}$

3) $2^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 6 \times 2^x - 16 = 0$

On pose : $2^x = X$ donc : $X^2 - 6X - 16 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 + 4 \times 1 \times 16 = 100 > 0$$

Donc : $X_1 = 8$ et $X_2 = -2$

Donc : $2^x = 8$ et $2^x = -2$ or $2^x > 0$ donc

l'équation $2^x = -2$ n'a pas de solutions

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ donc : } S = \{ 2 \}$$

4) $100^x + 40 = 14 \times 10^x \Leftrightarrow 10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$

$$\Leftrightarrow (10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0 \text{ on pose : } 10^x = X$$

On a alors : $X^2 - 14X + 40 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

$$X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \text{ donc : } X_1 = 10 \text{ et } X_2 = 4$$

Donc : $10^{x_1} = 10$ et $10^{x_2} = 4$ donc : $x_1 = 1$ et

$$x_2 = \log_{10} 4 \text{ Donc : } S = \{ 1, \log_{10} 4 \}$$

5) $2^{x-1} > 4^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > (2^2)^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^{2x} \Leftrightarrow x-1 > 2x$

$$\Leftrightarrow -1 > x \text{ donc : } S =]-\infty, -1[$$

6) $(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x+1 \text{ car } x \rightarrow (0,5)^x \text{ est}$

strictement décroissante car : $0 < 0,5 < 1$

$$(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x < 1 \text{ donc : } S =]-\infty, 1[$$

Remarque : a est un réel strictement positif et $a \neq 1$. Si u est une fonction dérivable alors

une primitive de $u'(x)a^{u(x)}$ est $\frac{1}{\ln a} a^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les primitives de la fonction

suivante : $f(x) = 3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x) = 3^{x-2}$ Si on pose : $u(x) = x-2$

On a : $f(x) = u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f

$$\text{sont : } F(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{u(x)} + \lambda = \frac{1}{\ln 3} 3^{x-2} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice7: Soit La fonction f définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$$

1) déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

5) construire la courbe C_f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solutions : 1) $f(x) = e^{x \ln 4} - e^{(x+1) \ln 2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$

Car : $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = 0$ Car : $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$

3) f est dérivable sur \mathbb{R} car la somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2 \ln 2 \times e^{x \ln 2} \times (e^{x \ln 2} - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe C_f :

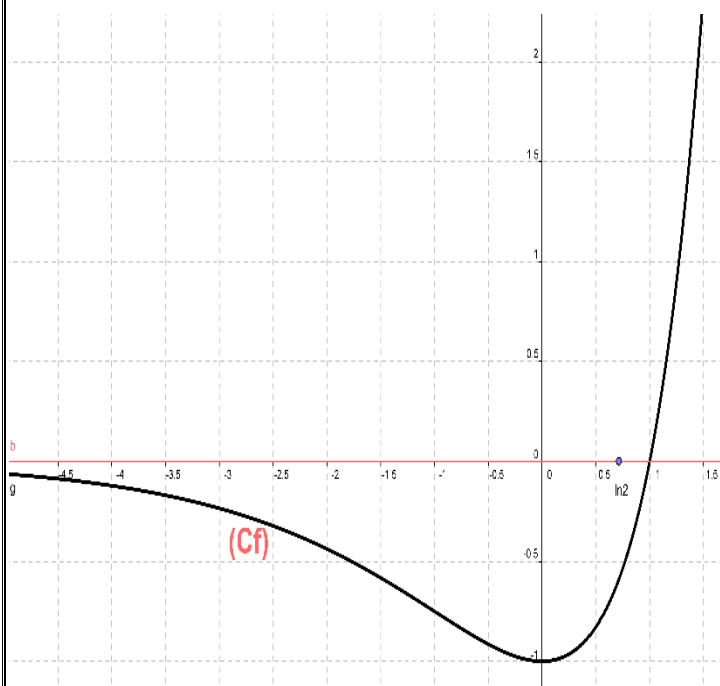
a) on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc : $y = 0$

est une asymptote a(C)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$

Car : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 8: Soit La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^x$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

- 1) Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- 5) Tracer la courbe C_f .
- 6) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = x$
- 7) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.

- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$
- b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle converge.
- c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

