

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(\ln x)^3}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - e^{3x} + x^2)$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\ln x)^3 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1$.

Exercice 2:

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1. $a(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x + 1}$ en $+\infty$.
2. $b(x) = \frac{x e^x + 1}{e^x + 1}$ en $\pm\infty$
3. $c(x) = \frac{x \ln x + \ln x}{\sqrt{x + 1}}$ en $+\infty$.

Exercice 3:

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} & \text{si } x \in [-4; 4] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4:

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 (penser à bien déterminer le domaine de définition pour commencer) et le cas échéant, préciser la valeur en x_0 qui rend la fonction continue.

- $$a(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} \text{ en } x_0 = -\frac{1}{2} \quad b(x) = \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \text{ en } x_0 = 1 \quad c(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} \text{ en } x_0 = 2.$$

Exercice 5:

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$.

Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur une intervalle J à expliciter.

Exercice 7:

Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans \mathbb{R} .

Montrer que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. (On donne : $e \approx 2,718$ et $e^{1/2} \approx 1,648$.)

Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^{++} par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}^{++} sur un intervalle que l'on précisera.
2. Justifier que l'équation $x + \ln x = 2005$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et que $1997 \leq \alpha \leq 1998$. (On donne : $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$.)

Exercice 9:

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad 2. h(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x - 1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(Rappel : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)

Exercice 10:

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
3. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en donner une interprétation graphique.

Exercice 11:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} (x + 1)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .
 b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
2. a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^{++} et calculer $f'(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^{++} .
 b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 c) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 12:

1. Soit a un réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ par $f(x) = \frac{1}{a + x}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a + x)^{n+1}}$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{3x + 2}{x^2 - 4}$.

Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $g(x) = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$ et en déduire la dérivée n -ième de g pour tout entier n .

Exercice 13:

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur leur ensemble de définition et expliciter leurs dérivées.

$$1. f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad 2. g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad 3. h(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 14:

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^{++} par $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Étudier la convexité de f et déterminer les coordonnées du ou des points d'inflexion.
3. Déterminer les coordonnées du ou des points de la courbe représentative de f , \mathcal{C}_f présentant une tangente horizontale.
4. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f . (On donne $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ et $\ln 2 \approx 0,7$)

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de f^{-1} .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} ?
5. La courbe représentative de f^{-1} admet-elle une tangente au point d'abscisse 1?
6. Dresser les tableaux de variation de f et f^{-1} .
7. Tracer sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1} .

Correction

Exercice 1:

1. Par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + e^{-x} = 1$ donc par quotient de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} = -\infty.$$

2. D'après la règle sur les limites des fractions rationnelles on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty.$$

3. Effectuons le changement de variable $X = \sqrt{x}$. On a alors $x^4 e^{-\sqrt{x}} = X^8 e^{-X}$. Or lorsque $x \rightarrow +\infty$ on a $X \rightarrow +\infty$ et d'après les croissances comparées $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^8 e^{-X} = 0$.

Donc
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$$

4.
$$\frac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = \frac{x}{(\ln x)^3} \times \frac{e^{2x}}{x}.$$

D'après les croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$.

Donc par produit
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(\ln x)^3} = +\infty.$$

5.
$$e^{x^2} - e^{3x} + x^2 = e^{x^2} (1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}).$$

Par composition de limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+3x} = 0$ et par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2+3x} + x^2 e^{-x^2}) = 1 \text{ et par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - e^{3x} + x^2) = +\infty.$$

6. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Donc par somme,
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\ln x)^3 + x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$$

7.
$$\frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = \frac{x(e^{2x}/x + e^x/x + 1)}{x(e^x/x - 1)} = \frac{e^{2x}/x + e^x/x + 1}{e^x/x - 1}.$$

Grâce aux croissances comparée $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}/x + e^x/x + 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x/x - 1 = -1$.

Donc
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x} = -1.$$

8. Si on pose $f(x) = \ln(2x^2 - 1)$, on remarque que $\frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Comme f est la composée de la fonction \ln et d'un polynôme, f est dérivable en 1 donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1). \text{ Or } f'(x) = \frac{4x}{2x^2 - 1} \text{ donc } f'(1) = 4.$$

On a donc
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x - 1} = 4.$$

- 9.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1 &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + (x + 1)) (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1)} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1 = 0$. 2ème BAC Sciences ex et math

Exercice 2:

$$1. - \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + (\ln x)/x)}{x(1 + 1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + (\ln x)/x}{1 + 1/x} = +\infty \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\ln x)/x}{1 + 1/x} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x(1 - 1/\ln x)}{x(1/x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \frac{1 - 1/\ln x}{1 + 1/x} = +\infty.$$

Donc la courbe représentative de a admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

$$2. - \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x(1 + e^{-x}/x)}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = 1 \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1/x - 1}{1 + 1/e^x} = 0, \text{ grâce aux croissances comparées.}$$

Donc la courbe représentative de b admet en $+\infty$ asymptote d'équation $y = x$ et en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 1$.

$$3. - \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x(1 + 1/x)}{\sqrt{x} \sqrt{1 + 1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln x \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x}} = +\infty.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x}} = 0 \text{ car d'après les croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc la courbe représentative de c admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox) .

Exercice 3:

1. - Il faut ici commencer par vérifier que f est bien définie c'est-à-dire qu'il nous faut vérifier que $x^2 - 2 \ln x$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Soit } h(x) = x^2 - 2 \ln x. \text{ } h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{++} \text{ et } h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x}.$$

Donc h est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. h atteint donc son minimum en 1 et comme $h(1) = 1$ on a bien $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

- Les fonctions $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow \ln x$ sont continues sur $]0; +\infty[$ donc les fonctions $x \rightarrow x + \ln x$ et $x \rightarrow x^2 - 2 \ln x$ sont continues sur $]0; +\infty[$. Comme de plus $x^2 - 2 \ln x$ ne s'annule pas sur cet intervalle, f est continue par quotient de fonctions continues sur $]0; +\infty[$.

- En 0 on a $f(0) = -\frac{1}{2}$.

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x(x/\ln x + 1)}{\ln x(x^2/\ln x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x/\ln x + 1}{x^2/\ln x - 2} = -\frac{1}{2}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ce qui signifie que f est aussi continue en 0.

f est donc continue sur \mathbb{R}^+ .

2. - g est définie sur $[-4; 4]$.

- Les fonctions $x \rightarrow x$, $x \rightarrow \sqrt{4+x}$ et $x \rightarrow \sqrt{4-x}$ sont continues sur $[-4; 4] \setminus \{0\}$ donc les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$ sont continues sur $[-4; 4] \setminus \{0\}$. Comme de plus x ne s'annule pas sur cet ensemble, g est continue par quotient de fonctions continues sur $[-4; 4] \setminus \{0\}$.

- En 0 on a $g(0) = \frac{1}{2}$.

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ ce qui signifie que g est aussi continue en 0.

g est donc continue sur $[-4; 4]$.

Exercice 4:

- $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ et on voit facilement que a est continue sur \mathcal{D}_a .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{(2x+1)(x-1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1/2} x-1 = -\frac{3}{2}$$

Donc a est prolongeable par continuité en $-\frac{1}{2}$ en posant $a(-1/2) = -\frac{3}{2}$.

- Grâce à une division euclidienne on a $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2 - 1)$. Donc on a $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et b est bien continue sur \mathcal{D}_b .

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} = \pm\infty$$

Donc b n'est pas prolongeable par continuité en 1.

- On a $\mathcal{D}_c = [0; 2[\cup]2; +\infty[$ et c est bien continue sur \mathcal{D}_c . De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} c(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+7}+3)}{\sqrt{2x}+2} = 3 \end{aligned}$$

Donc c est prolongeable par continuité en 2 en posant $c(2) = 3$.

Exercice 5:

On pose $g(x) = f(x) - x$. On cherche donc à savoir s'il existe x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

Par différence de fonctions continues, g est continue sur $[0; 1]$.

De plus $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car on sait que $f(1) \in [0; 1]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe bien $x_0 \in [0; 1]$ tel que $g(x_0) = 0$.

Il existe bien $x_0 \in [0; 1]$ tels que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6:

- Les fonctions $x \rightarrow e^x - e^{-x}$ et $x \rightarrow 2e^{-x} + 1$ sont continues sur \mathbb{R} et comme $2e^{-x} + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} (exponentielle positive) par quotient de fonctions continues, f est continue sur \mathbb{R} .

- f est aussi dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{4 + e^x + e^{-x}}{(2e^{-x} + 1)^2} > 0$.

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

f réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[$.

De plus $\lim_{-\infty} f = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 7:

- On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + 2x - 3$.
 - f est continue sur \mathbb{R} comme somme de fonctions continues sur \mathbb{R} .
 - Les fonctions $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow 2x - 3$ sont strictement croissantes sur \mathbb{R} donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- f réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[=]-\infty; +\infty[$.
- Comme $0 \in f(\mathbb{R})$, 0 admet un unique antécédent α par f .
- Cela signifie qu'il existe un unique réel α tel que $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -2x + 3$.
- De plus $f(1/2) = e^{1/2} + 1 - 3 = e^{1/2} - 2 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f(1/2) &\leq 0 \leq f(1) \\ \Leftrightarrow f(1/2) &\leq f(\alpha) \leq f(1) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(f(1/2)) &\leq f^{-1}(f(\alpha)) \leq f^{-1}(f(1)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\ \Leftrightarrow 1/2 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Exercice 8:

1. - f est continue sur \mathbb{R}^{+*} comme somme de fonctions continues sur \mathbb{R}^{+*} .
- Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \ln x$ sont strictement croissantes sur \mathbb{R}^{+*} donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} .

f réalise donc une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur $f(\mathbb{R}^{+*}) =]\lim_{0^+} f; \lim_{+\infty} f[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

2. On cherche ici à résoudre l'équation $f(x) = 2005$.
 - Comme $2005 \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R}^{+*})$, 2005 admet un unique antécédent α par f .
- Cela signifie qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 2005 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 2005$.
- De plus $f(1997) = 1997 + \ln 1997 < 2005$ et $f(1998) = 1998 + \ln 1998 > 2005$. On a donc

$$\begin{aligned} f(1997) &\leq 2005 \leq f(1998) \\ \Leftrightarrow f(1997) &\leq f(\alpha) \leq f(1998) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(f(1997)) &\leq f^{-1}(f(\alpha)) \leq f^{-1}(f(1998)) \quad \text{car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\ \Leftrightarrow 1997 &\leq \alpha \leq 1998 \end{aligned}$$

Exercice 9:

1. - f est définie sur \mathbb{R} car $1 - e^{-2x}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* .
- Les fonctions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow e^{-x}$ et $x \rightarrow e^{-2x}$ sont dérivables sur \mathbb{R}^* donc les fonctions $x \rightarrow x^2 e^{-x}$ et $x \rightarrow 1 - e^{-2x}$ sont dérivables sur \mathbb{R}^* . Comme de plus $1 - e^{-2x}$ ne s'annule pas sur cet ensemble, f est dérivable sur \mathbb{R}^* par quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* .
- En 0 on a $f(0) = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ qui est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

f est donc dérivable sur \mathbb{R} .

2. - h est définie sur \mathbb{R}^{+*} car $x - 1$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[\setminus \{1\}$.
 - On remarque que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1 \neq h(0)$ car $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$
- Donc h n'est pas continue en 1 donc ne peut pas être dérivable en 1.

- Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \ln x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$ donc les fonctions $x \rightarrow x \ln x$ et $x \rightarrow x - 1$ sont dérivables sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$. Comme de plus $x - 1$ ne s'annule pas sur cet ensemble, h est dérivables sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$ par quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$.

h est donc dérivable uniquement sur $]0; +\infty[\setminus\{1\}$.

Exercice 10:

- Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \ln(x^2)$ sont continues sur \mathbb{R}^* donc, par produit et somme, f est continue sur \mathbb{R}^* .
 - On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln |x| - 2x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$.
 Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ ce qui signifie que f est continue en 0.

f est donc continue sur \mathbb{R} .

- Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \ln(x^2)$ sont dérivables sur \mathbb{R}^* donc, par produit et somme, f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
- On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) - 2 = -\infty$.
 Donc f n'est pas dérivable en 0 mais comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ on peut dire que la courbe représentative de f admet en 0 une tangente verticale.

Exercice 11:

- a) - Les fonctions $x \rightarrow x + 1$ et $x \rightarrow e^{-1/x}$ sont continues sur \mathbb{R}^{+*} donc, par produit, f est continue sur \mathbb{R}^{+*} .
 - On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)e^{-1/x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
 Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ ce qui signifie que f est continue en 0.

f est donc continue sur \mathbb{R}^+ .

- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \times \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$ car d'après les croissances comparées $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$.
 f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
- Les fonctions $x \rightarrow x + 1$ et $x \rightarrow e^{-1/x}$ sont dérivables sur \mathbb{R}^{+*} donc, par produit, f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} . De plus $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-1/x}$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Pour $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Exercice 12:

1. Comme $x + a$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ donc pour tout entier n , f est bien de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ est vraie pour tout entier n .

- Pour $n = 0$:

$$\text{D'une part } f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x+a}.$$

$$\text{D'autre part } \frac{(-1)^0 0!}{(x+a)^{0+1}} = \frac{1}{x+a}.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

- Soit n un entier fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)}{(x+a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

On a donc montré que pour tout entier n , $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

2. On a $g(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2}$.

Donc pour tout entier n , on a

$$g^{(n)}(x) = 2 \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+2} \right)^{(n)} = \frac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$$

Exercice 13:

1. - La fonction $x \rightarrow x + 1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et la fonction $x \rightarrow e^x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 0[$.

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

- On a de plus $\lim_{0^+} f = 1 = f(0) = \lim_{0^-} f$ donc f est continue en 0.

f est continue sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = 1$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) = e^x$.

$$\text{Donc } \lim_{0^+} f' = 1 = \lim_{0^-} f'$$

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Les fonctions $x \rightarrow e^x - 1$ et $x \rightarrow e^x + 1$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $e^x + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Par quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , g est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\text{On a de plus } g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

3. - Les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow e^{-3/|x|}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* donc par produit h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

- On a de plus $\lim_{0^+} h = 0 = h(0) = \lim_{0^-} h$ car $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-3/|x|} = 0$. Donc h est continue en 0.

h est continue sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x > 0$ on a $h'(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right) e^{-3/x}$ et pour tout $x < 0$, $h'(x) = \left(1 - \frac{3}{x}\right) e^{3/x}$.

$$\text{Donc, grâce aux croissances comparées, } \lim_{0^+} h' = 0 = \lim_{0^-} h'$$