



I. Bac 2014 session de rattrapage

On considère f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm).

1. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; puis interpréter géométriquement le résultat. (0,75)

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (0,75)

b. En déduire que : la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction. (0,5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x)$ pour tout x de \mathbb{R} puis vérifier que $f'(0) = 0$ (1)

b. Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $]-\infty, 0]$ (0,5)

c. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} (1,25)

4. ..

a. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique sur $[0; +\infty[$ α tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (on admettra que $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$). (0,75)

b. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (on admettra que la courbe de f possède un point d'inflexion, on ne le déterminera pas). (0,75)

5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$ (0,75)

6. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ (1)

2. Bac 2015 session normale (sujet qui a été refait)

I. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - 2x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} puis en déduire que la fonction g est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et la fonction f est croissante sur $[\ln 2, +\infty[$ (0,75)

2. Vérifier que : $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$ (0,5)

3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de \mathbb{R} (0,5)

II. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$.

Et soit (C_g) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm)

1.



a. ..Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ (on remarquera $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$) pour tout x de \mathbb{R}^* (1)

b. Interpréter géométriquement les deux résultats (0,5)

2. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$. pour tout x de \mathbb{R}^* (0,75)

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} . (0,75)

c. Montrer que : $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) au point O origine du repère (0,75)

3. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (on prend $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la courbe de f admet deux points d'inflexions l'une a pour abscisse appartient à $]0,1[$ et l'autre a pour abscisse supérieure à $\frac{3}{2}$) (0,75)

4. ..

a. Montrer que : $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0, +\infty[$ (0,75)

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$ (0,75)

c. Soit en cm^2 $A(E)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$ (0,75)

III. Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 0]$ par : $h(x) = f(x)$.

1. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera (0,5)

2. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1} (0,5)

IV. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer par récurrence que : $u_n \leq 0$ pour tout n de \mathbb{N} (0,5)

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante (on remarquera graphiquement que $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$) (0,75)

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n) (0,75)

3. Bac 2016 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm) .

I. ..

1. ..



a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (0, 25)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ (0, 5)

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0, 5)

b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat (0, 5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout x de \mathbb{R} (0, 5)

b. dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} . (remarquer que $f'(0) = 0$) (0, 25)

c. montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (0, 75)

4. ..

a. Montrer que : la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4; +\infty[$ est au dessous de la droite (D) $]\ln 4; +\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty; \ln 4[$ (0, 5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, -5)$ (0, 5)

c. Construire la droite (D) et la courbe (C_f) de f dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (on prend $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$) (0, 75)

5. ..

a. Montrer que : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$ (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et l'axe des ordonnées et le droite d'équation $x = \ln 4$ (0,75)

II. ..

1. ..

a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (0, 5)

b. Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$ (0, 5)

2. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4; +\infty[$ par $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$.

a. Montrer que : la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur \mathbb{R} (0,75)

b. Vérifier que : $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$ (0,75)

4. Bac 2017 session de rattrapage

On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

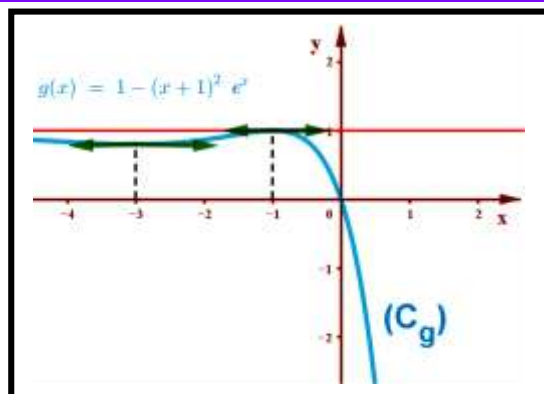
I. ..

1. Vérifier que : $g(0) = 0$ (0,25)



2. A partir de la courbe représentative (C_g) de la fonction g (voir figure ci-contre) : (1)

- Montrer que : $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty, 0[$
- Montrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$



II. On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$.

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 2 cm).

1. ..

a. Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout x de \mathbb{R} puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

..... (0,75)

b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)]$ en déduire que : la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage $-\infty$.

..... (0,5)

c. Montrer que : la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D) .

..... (0,25)

2. ..

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x \left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x \right]$ (0,5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction .

..... (0,25)

3. ..

a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} .

..... (0,75)

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

..... (0,75)

c. Montrer que : la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 .

..... (0,75)

4. Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite (D) et la courbe (C_f) (on prend $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,75$). .

..... (1)

5. ..

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle \mathbb{R} . puis montrer que $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.

..... (0,5)

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$.

..... (0,75)



- c. Calculer , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) , et l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$ (0,5)

5. BAC 2018 SESSION NORMALE

Soit la fonction numérique g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

I. ..

1. Vérifier que : $g(0) = 0$ (0,25)
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ (0,5)

II. Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de 1 cm) .

1. ..

- a. Vérifier que : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de \mathbb{R} puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)
- b. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$, en déduire que: la courbe (C_f) admet une asymptote (D) au voisinage $+\infty$ d'équation $y = x$ (0,75)
- c. Vérifier que : $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de \mathbb{R} puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (0,5)
- d. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement (0,5)

2. ..

- a. Montrer que : $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de \mathbb{R} (0,25)
- b. En déduire que : (C_f) est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0, 1]$ (0,5)

3. ..

- a. Montrer que : $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de \mathbb{R} (0,75)
- b. En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ (0,5)
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} (0,25)

4. ..

- a. Vérifier que : $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de \mathbb{R} (0,25)
- b. En déduire que : la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4 . (0,5)
5. Construire (D) et (C_f) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (on prend $f(4) \approx 4,2$) (1)



6.

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur \mathbb{R} . puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$. (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$. (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (D) et le droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,75)

III. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .

1. Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de \mathbb{N} (on pourra utiliser le résultat de la question II 3) b-). (0,75)

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante . (0,5)

3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer sa limite. (0,75)

6. Bac 2019 session de rattrapage

Première Partie :

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

et (C_f) a courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 1 cm) .

1.

a. vérifier que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ puis interpréter le résultat géométriquement . (0,5)

b. vérifier que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement . (0,5)

2.

a. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admettra une branche parabolique de direction l'asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. (0,5)

3.

a. Montrer que : pour tout x de \mathbb{R}^* $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$. (0,75)

b. Vérifier que : pour tout x de \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 4 > 0$. (0,25)

c. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$. (0,75)

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R}^* . (0,5)

4. Construire la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (1)

5.



- a.** Vérifier que : la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2,4]$ (0,5)
- b.** Vérifier que : $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$ (0,25)
- c.** Calculer l'intégral : $\int_2^4 e^{x-4} dx$ (0,5)
- d.** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$ (0,75)

Deuxième Partie :

- 1.** On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par : $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.
- a.** Calculer : $g(4)$ (0,25)
- b.** Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$ (0,5)
- c.** Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2,4]$: $g(x) \leq 0$ (0,5)
- 2.** ..
- a.** Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $f(x) - x = \frac{x-2}{x^2} g(x)$ (0,5)
- b.** En déduire que : pour tout x de $[2,4]$, $f(x) \leq x$ (0,25)
- 3.** Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} .
- a.** Montrer par récurrence que : pour tout n de \mathbb{N} $2 \leq u_n \leq 4$ (0,5)
- b.** Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire que (u_n) est convergente (0,5)
- c.** Calculer la limite de la suite (u_n) (0,75)