

**Exercice 1 :****1<sup>ère</sup> partie :**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = xe^x + 1$

① - a - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ .

b - Calculer  $h'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis étudier les variations de la fonction  $h$ .

② - En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**2<sup>ème</sup> partie :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x - e^x + 2$ .

① - a - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

b - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis étudier les variations de la fonction  $g$ .

② - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions réelles distinctes  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\alpha > \beta$ , puis montrer que  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

③ - En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**3<sup>ème</sup> partie :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ .

① - Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

② - a - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b - Etudier les variations de  $f$ , puis dresser la tableau de variation.

③ - a - Montrer que :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b - Donner un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

④ - Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 0.

⑤ - a - Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) - x = \frac{(x+1) \times u(x)}{xe^x + 1}$ , tel que :  $u(x) = e^x - xe^x - 1$ .

b - Etudier les variations de  $u$  sur  $\mathbb{R}$ .

c - En déduire le signe de  $u$  sur  $\mathbb{R}$ .

d - En déduire les positions relatives de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(T)$ .

⑥ - Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

( On prends  $-1,85 < \beta < -1,84$  et  $-1,19 < f(\beta) < -1,18 \frac{2}{e^2} \approx 0,27$  ).

**Exercice 2 :****1<sup>ère</sup> partie :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ .

① - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis étudier les variations de la fonction  $g$ .

② - Dresser le tableau de variations de  $g$  .

③ - a - Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$

b - Dédire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + e^{-x} \geq 1$  .

### 😊 2<sup>ème</sup> partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$  .

① - Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$  .

② - Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$  .

③ - a - Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

b - interpréter graphiquement les résultats obtenus.

④ - a - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  .

b - Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  .

⑤ - a - Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 0.

b - Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$  .

Puis étudier le signe de  $x - f(x)$  sur  $\mathbb{R}$  .

c - En déduire les positions relatives de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(T)$  .

⑥ - Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . ( On prends  $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$  ) .

### 😊 3<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$  .

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$  .

② - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

③ - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### 📎 Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1}$  .

① - a - Vérifier que :  $f(x) = \frac{x(1 - e^{-2x})}{1 + e^{-2x}}$  .

b - Etudier la parité de  $f$  et interpréter les résultats graphiquement.

② - a - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

b - Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$  .

c - En déduire les positions relatives de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$  .

- ③ - a - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b - Calculer  $f'(0)$  et interpréter les résultats graphiquement.  
 c - Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : e^{4x} - 1 \geq 0$  .  
 d - En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  .
- ④ - Tracer  $(\mathcal{E}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### 🔗 Exercice 4 :

😊 1<sup>ère</sup> partie : Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x + e^{-x}$  .

- ① - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis étudier les variations de la fonction  $g$ .  
 ② - a - Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 1$   
 b - Déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 + xe^x > 0$  .

😊 2<sup>ème</sup> partie : On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \ln(1 + xe^x)$  .

- ① - Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
 ② - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et interpréter géométriquement le résultat obtenu .  
 ③ - a - Calculer  $(\forall x \in D_f) : f'(x)$  .  
 b - Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$  .  
 ④ - a - Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$  .  
 b - Etudier la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{E}_f)$  au voisinage de  $+\infty$  .  
 ⑤ - Tracer  $(\mathcal{E}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### 🔗 Exercice 5 :

😊 1<sup>ère</sup> partie : Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$  .

- ① - Déterminer  $D_g$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ .  
 ② - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in D_g$ , puis étudier les variations de la fonction  $g$ .  
 ③ - a - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[e+1; e^3+1]$ .  
 b - Déterminer le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles  $]1; \alpha]$  et  $[\alpha; +\infty[$  .

😊 2<sup>ème</sup> partie : On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$  .

- ① - a - Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$  .  
 b - Trouver les limites de  $f$  aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition  $D_f$  .  
 ② - a - Calculer  $(\forall x \in D_f) : f'(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  .  
 b - Montrer que :  $(\forall x \in D_f) : f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$  .  
 ③ - Tracer  $(\mathcal{E}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## Exercice 6 :

### 1<sup>ère</sup> partie :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x + 2x - e^{-x}$ .

- ① - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .
- ② - Dresser le tableau variations de la fonction  $g$ .
- ③ - Dédire que :  $(\forall x \in [0; +\infty[) : g(x) > 0$ .

### 2<sup>ème</sup> partie :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x - \frac{2x}{1+e^x}$ .

- ① - Déterminer  $D_f$ .
- ② - a - Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{e^{-x} + 1} = 2x - \frac{2x}{1+e^x}$ .  
b - Etudier la parité de  $f$ .
- ③ - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- ④ - a - Montrer que :  $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$ .  
b - Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .  
c - Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .
- ⑤ - a - Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .  
b - Etudier les positions relatives de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$ .
- ⑥ - Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 3<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = \ln 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$ .

- ① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .
- ② - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- ③ - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.