Exercice 1 :

1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=(2-x)e^{-x}+1$

① - a - *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

b - *Etudier les variations de la fonction g.*

②- *En déduire que :* $g(x)\succ 0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

2ème partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x-1)e^{-x}+x$.

① - *Calculer :* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$.

② - *Etudier les variations de f .*

③ - a - *Etudier les branches infinies de courbe* $(\mathscr{C}_f)$

b - *Etudier les positions relatives de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *et la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$.

④ - *Tracer* $(\mathscr{C}_f)$ *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2 :

1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=e^{x}-2x+2$

① - *Calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

② - a - *Etudier le signe de* $g'(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *et en déduire les variations de la fonction g (le calcul des limites n'est pas demandé).*

b - *En déduire que* $g(x)\succ 0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

2ème partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=xe^{-x}+\frac{x}{2}+1$.

① - a - *Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{f(x)}{x}$ *et interpréter le résultat graphiquement.*

b - *Calculer* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]$ *et interpréter le résultat graphiquement.*

c - *Etudier les positions relatives de la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *et la droite* (Δ) *d'équation :* $y=\frac{1}{2}x+1$.

② - a - *Montrer que :* $f'(x)=\frac{g(x)}{2e^{x}}$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

b - *Dresser le tableau de variations de f .*

③ - a - *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *dans* $]-1;0[$

b - *Déterminer l'équation de la tangente* (T) *à la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *au point d'abscisse 0.*

④- Calculer $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis déterminer le point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$

⑤- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(On prends $e\approx 2,7$ et $\frac{2}{e^2}\approx 0,27$).

Exercice 3 :

☺ 1ère partie :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x$

① - Etudier les variations de la fonction g.

②- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

☺ 2ème partie :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{xe^x-1}{e^x-1}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition D_f.

② - a - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-x\right]$ et interpréter le résultat graphiquement.

b - Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c - En déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

③ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, puis dresser le tableau de variations de f .

④- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 :

☺ 1ère partie :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{e^x+1}$.

① - a - Vérifier que : $1-\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

b - Etudier la parité de f et interpréter les résultats graphiquement.

② - Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\right]$ et interpréter le résultat graphiquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

b - En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\ 1-\dfrac{1}{e^x+1}\le\dfrac{x}{2}$.

④- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

☺ 2ème partie :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=1-\dfrac{1}{e^{u_n}+1}\end{cases}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

①- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n\succ 0$.

②- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}\le\dfrac{u_n}{2}$ puis en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

③- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et déterminer sa limite.