FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Fonction logarithme Népérienne

1.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition : La fonction logarithme népérienne est la fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur]0, +∞ [et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences immédiates :

1) ln est définie sur]0, +∞[
2) $f(x) = ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
3) $ln(1) = 0$
4) ln est dérivable sur]0, +∞[

et ($x \in]0, +\infty[$) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Monotonie : On a : ($x \in]0, +\infty[$) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \succ 0$

Donc la fonction ln est strictement croissante sur]**0**, +∞[on a donc 1) $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$

2) $ln(a) \leq ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Applications1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$ 6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

solution : 1) $f(x) = ln(x+1)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ donc : $D_f =]-1, +\infty[$

2) $g(x) = ln(x^2 - 3x + 2)$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{3+1}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$ **et** $x_2 = \frac{3-1}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Donc : $D_g =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

3) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \, et \ln x \neq 0\}$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ donc : $D_h =]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

La fonction est définie ssi $x > 0$ et $x - 1 > 0$ cad $x > 0$ et $x > 1$ donc : $D_k =]1;+\infty[$

6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

La fonction est définie ssi $\frac{x-4}{x+1} > 0$ et $x+1 > 0$

On utilisant le tableau de signe on trouve :

$D_m =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

Applications2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 1) $ln(x-2) = 0$

2) $ln(3x-1) = ln(5x-10)$ 3) $ln(2x-1) - ln(1-x) = 0$

4) $ln(2x) = ln(x^2+1)$ 5) $ln(2x-6) \geq 0$

6) $ln(x-1) - ln(3x+1) < 0$

Solution : 1) $ln(x-2) = 0$

a) cette équation est définie ssi : $x - 2 > 0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ donc : $D_E =]2;+\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(x-2)=0 \Leftrightarrow ln(x-2)=ln(1) \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow \in D_E$

Donc : $S=\{3\}$

2) $ln(3x-1)=ln(5x-10)$

a) cette équation est définie ssi : $5x-10>0$ et $3x-1>0$ cad $x>2$ et $x>\frac{1}{3}$ donc : $D_E =]2;+\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(3x-1)=ln(5x-10) \Leftrightarrow 3x-1=5x-10 \Leftrightarrow -2x=-9$

Donc : $\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}\in D_E$ donc : $S=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

3) $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x-1>0$ et $1-x>0$ cad $x>\frac{1}{2}$ et $x<1$

donc : $D_E = \left]\frac{1}{2};1\right[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0 \Leftrightarrow ln(2x-1)=ln(1-x)$

$2x-1=1-x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\in D_E$

Donc : $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

4) $ln(2x)=ln(x^2+1)$

a)cette équation est définie ssi : $2x>0$ et $x^2+1>0$ cad $x>0$ donc : $D_E =]0;+\infty[$

$In(2x)=In(x^2+1) \Leftrightarrow 2x=x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1\in D_E$ Donc : $S=\{1\}$

5) $ln(2x-6)\geq 0$

a) cette équation est définie ssi : $2x-6>0$

$2x-6>0 \Leftrightarrow x>3$ Donc : $D_E =]3;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$ln(2x-6)\geq 0 \Leftrightarrow ln(2x-6)\geq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-6\geq 1$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x\in \left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

donc : $S=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[\cap]3;+\infty[= \left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

6) $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$

a) cette équation est définie ssi : $x-1>0$ et $3x+1>0$ cad $\left(x>-\frac{1}{3};x>1\right)$ donc $D_I =]1;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$ln(x-1)-ln(3x+1)<0 \Leftrightarrow ln(x-1)<ln(3x+1)$

$x-1<3x+1 \Leftrightarrow 2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$

Donc : $S=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[$ donc : $S=]1;+\infty[$

La propriété caractéristique :

$(\forall x>0;\forall y>0)(ln(x\times y)=ln(x)+ln(y))$

Règles de calculs :

- $(\forall x>0)(ln\left(\frac{1}{x}\right)=-ln(x))$
- $(\forall x>0;\forall y>0)(ln(xy)=ln(x)-ln(y))$
- $(\forall x>0;\forall r\in\mathbb{Q})(ln(x^r)=r\,ln(x))$
- $(\forall a>0)\ ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}lna$
- $(\forall a>0)\ ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}lna \quad \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Exemples : On pose $l\,n(2)\simeq 0,7$ et $l\,n(3)\simeq 1,1$

Calculer: $l\,n(6)$; $l\,n(4)$; $l\,n(8)$; $l\,n(72)$

$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$; $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$; $l\,n(\sqrt{2})$; $l\,n(\sqrt{6})$; $l\,n(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$; $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}$ et $C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

Solution :

$l\,n(6)=l\,n(2\times 3)=l\,n(2)+l\,n(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$

$l\,n(4)=l\,n(2\times 2)=l\,n(2^2)=2l\,n(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$

$l\,n(8)=l\,n(2\times 2\times 2)=l\,n(2^3)=3l\,n(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$

$l\,n(72)=l\,n(3^2\times 2^3)=l\,n(3^2)+l\,n(2^3)=2l\,n(3)+3l\,n(2)$

$l\,n(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$

$$l\,n\left(\frac{3}{2}\right)=l\,n(3)-l\,n(2)\simeq 1{,}1-0{,}7\simeq 0{,}4$$

$$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)=-l\,n(2)\simeq -0{,}7$$

$$l\,n\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}l\,n(6)\simeq\frac{1}{2}\times 1{,}8\simeq 0{,}9$$

$$\ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1{,}1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1{,}1+\frac{0{,}7}{2}\simeq 1{,}1+0{,}35\simeq 1{,}45$$

$$ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)=ln\left(3\times 2^2\right)+ln\left(\sqrt[3]{3}\right)=ln(3)+2ln(2)+ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$ln\left(12\sqrt[3]{3}\right)=ln(3)+2ln(2)+\frac{1}{3}ln(3)\simeq 1{,}1+1{,}4+\frac{1}{3}\times 1{,}1\simeq 2{,}86$$

$$A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=ln\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)=ln\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$A=ln\left(\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)=ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}ln2\simeq 0{,}35$$

$$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}=\frac{1}{4}ln3^4+\frac{1}{2}ln3-ln\frac{1}{3^3}=\frac{4}{4}ln3+\frac{1}{2}ln3+3ln3$$

$$B\simeq 1{,}1+\frac{1{,}1}{2}+3\times 1{,}1\simeq 4{,}95$$

$$C=ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2015}+ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}=ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2019}\times\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}\right)$$

$$C=ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^{2019}=ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right)^{2019}=2019ln(1)=2019\times 0=0$$

Exercice1 : On pose $\alpha = ln(a)$ et $\beta = ln(b)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln\left(a^2b^5\right)$ et $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Solution :

$$\ln\left(a^2b^5\right)=\ln\left(a^2\right)+\ln\left(b^5\right)=2\ln a+5\ln b=2\alpha+5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)=\ln\left(a^{-\frac{7}{6}}b^{-\frac{1}{6}}\right)=\ln a^{-\frac{7}{6}}+\ln b^{-\frac{1}{6}}=-\frac{7}{6}\ln a-\frac{1}{6}\ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)=-\frac{7}{6}\alpha-\frac{1}{6}\beta$$

1.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction ln on peut conclure que :

1.2.1) ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

1.2.2) ***Déterminons des limites référentielles :***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=?$

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $ln(1)=0$ alors : $ln(2)$ est un réel strictement positif. Par conséquent, le quotient : $\dfrac{A}{\ln 2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que : $n\geq\dfrac{A}{\ln 2}$ (il suffit de prendre $n=E\left(\dfrac{A}{\ln 2}\right)+1$)

On multiplie par $ln\,2$ qui est positif on aura : $n\,ln2\geq A \Leftrightarrow ln(2^n)\geq A$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x\geq 2^n$ nous avons : $lnx\geq n\,ln2\geq A$

Donc $(\forall A>0)(\exists B>0)(x\geq B\Rightarrow lnx>A)$:

($B=ln2^n$ où $=E\left(\dfrac{A}{\ln 2}\right)+1$) Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}lnx=+\infty}$

b)Déterminons : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

On pose : $t=\dfrac{1}{x}$ si $x\to 0^+$ alors $t\to+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\dfrac{1}{t}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=-\infty$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty}$

La droite (Δ): $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (C_{ln})

c)Déterminons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=?$

En utilisant leT.A.F de la fonction ln sur $I=\left[1;\sqrt{x}\right]$

On va montrer que : $0\prec\dfrac{\ln x}{x}\prec\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$

En effet la fonction ln est continue, dérivable sur I

D'après le T.A.F on donc :

$$\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt{1}=\frac{1}{c}\left(\sqrt{x}-1\right)\leq\sqrt{x}-1$$

Donc : $\ln x\leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)$ Donc : $0\prec\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$

Et puisque on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

(à vérifier) alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

Donc la courbe (C_{ln}) admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Propriété : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ *4)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$)

5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^r\ln x=0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$) 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

Preuve : *4)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ où ($n\in\mathbb{N}^*$) **?**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x^{n-1}}=0\times0=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0$ *(où $n\in\mathbb{N}^*$) ?*

Montrons d'abord que : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0^-$?

On pose $t=\frac{1}{x}$ si $x\to0^+$ alors $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{\ln t}{t}=0^-$$

$$\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=\lim_{x\to0^+}x^{n-1}x\ln x=0\times0=0$$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$?

La fonction ln étant dérivable en 1 alors :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-\ln1}{x-1}==ln'(1)=1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$?

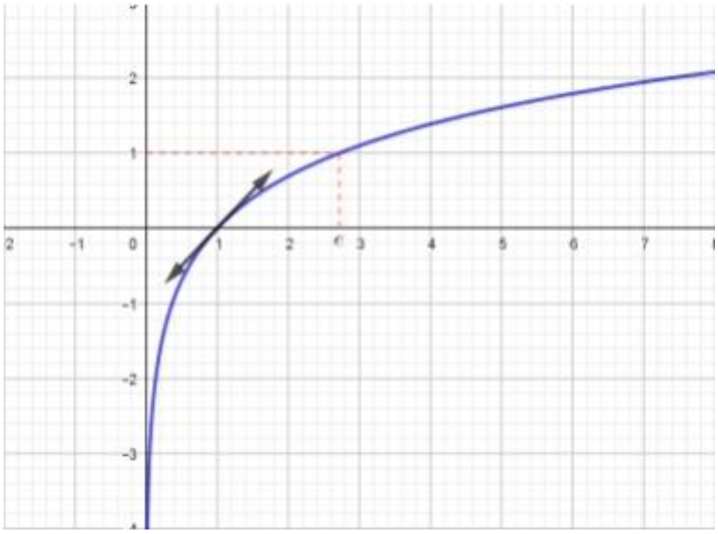
On pose : $t=x+1$ et on applique : 6)

1.2.3) **Le nombre e :**

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $ln(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) : $ln(e)=1$

1.2.4) **Le Tableau de variation et La courbe (C_{ln})** : (C_{ln}) à une tangente en $A(1,0)$:(T): $y=x-1$

x	0	1	e	$+\infty$
$ln'x$	‖		$+$	
lnx	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$



Exemple1 : simplifier et calculer :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)$

Solution :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$A=2\times1+4\times1--1=7$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln(\sqrt{e})-\frac{1}{3}9\ln(e)$

$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

Exemple2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-lnx$ 4) $\lim\limits_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\log x$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to0^+}x(ln(x))^2$ on pose : $X=\sqrt{x}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$ 11) $\lim_{x\to0^+}x^2\left(\ln x\right)^5$

Solution : 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(x\right)+1}{\ln x}$?

On a **:** $\lim_{x\to+\infty}2\ln\left(x\right)+1=2\times\left(+\infty\right)+1=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x\right)=+\infty$ donc forme indéterminé(FI)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$$

(car $\lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(ln^2\left(x\right)-lnx\right)$?

$$\lim_{x\to+\infty}ln^2\left(x\right)-lnx=\lim_{x\to+\infty}ln^2\left(x\right)-lnx=\lim_{x\to+\infty}lnx\left(ln\left(x\right)-1\right)=+\infty$$

(car $\lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

3) $\lim_{x\to+\infty}x-lnx$?

$$\lim_{x\to+\infty}x-lnx=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$$

(car $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

4) $\lim_{x\to0^+}ln^2\left(x\right)+lnx$?

$$\lim_{x\to0^+}ln^2\left(x\right)+lnx=\lim_{x\to0^+}lnx\left(ln\left(x\right)+1\right)=+\infty$$

Car $\lim_{x\to0^+}\ln\left(x\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^+}\ln\left(x\right)+1=-\infty$

5) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}+lnx=\lim_{x\to0^+}\frac{1+xlnx}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$ car $\lim_{x\to0^+}xlnx=0$

6) $\lim_{x\to0^+}x^4\log x=0$ car $\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=0$ *(où $n\in\mathbb{N}^*$)*

7) $\lim_{x\to0^+}2x-x^3\ln x=0$

8) $\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ on pose : $X=\sqrt{x}$

$x\to+\infty\Leftrightarrow X\to0^+$

$$\lim_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{0^+}\frac{1}{X}ln\left(1+X\right)=\lim_{0^+}\frac{ln\left(1+X\right)}{X}=1$$

Car : $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}=1$

9) $\lim_{x\to0^+}x\left(ln\left(x\right)\right)^2$ on pose : $X=\sqrt{x}$

$$X=\sqrt{x}\Leftrightarrow X^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Leftrightarrow X^2=x$$

$x\to0^+\Leftrightarrow X\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}x\left(ln\left(x\right)\right)^2=\lim_{x\to0^+}X^2\left(ln\left(X^2\right)\right)^2=\lim_{x\to0^+}X^2\left(2lnX\right)^2$$

$$\lim_{x\to0^+}x\left(ln\left(x\right)\right)^2=\lim_{x\to0^+}4X^2\left(lnX\right)^2$$

$$\lim_{x\to0^+}x\left(ln\left(x\right)\right)^2=4\lim_{x\to0^+}\left(XlnX\right)^2=4\times0^2=0$$

Car : $\lim_{x\to0^+}xlnx=0^-$

10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$? On pose : $f\left(x\right)=\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$

$$f\left(x\right)=\frac{ln\left(x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)}{x-1}=\frac{lnx^2+ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$$

$$f\left(x\right)=\frac{2lnx+ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}=\frac{2lnx}{x-1}+\frac{ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$$

$$f\left(x\right)=2\frac{\frac{lnx}{x}}{1-\frac{1}{x}}+\frac{ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$$ on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}=0$

11) $\lim_{x\to0^+}x^2\left(\ln x\right)^5=\lim_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{5}}\ln x\right)^5$

On a : $\lim_{x\to0^+}x^{\frac{2}{5}}\ln x=0$ donc $\lim_{x\to0^+}x^2\left(\ln x\right)^5=0$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $ln\left(2x-1\right)=\frac{3}{2}$ 2) $2\left(\ln x\right)^2+\ln x-6=0$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1=0$

4) $\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1$

Solution : 1) $ln(2x-1)=\frac{3}{2}$

a) cette équation est définie ssi :

$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ donc : $D_E = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(2x-1)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow ln(2x-1)=\frac{3}{2}ln(e)$

$\Leftrightarrow ln(2x-1)=ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow 2x-1=e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow 2x-1=\left(\sqrt{e}\right)^3 \Leftrightarrow x=\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3+1}{2}\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $S=\left\{\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3+1}{2}\right\}$

2) $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$
on pose : $\ln x = X$

on a alors : $2X^2+X-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+48=49>0$

$X_1=\frac{-1+7}{2\times 4}$ et $X_2=\frac{-1-7}{2\times 2}$

Donc : $X_1=\frac{3}{2}$ et $X_2=-2$

Donc : $\ln x_1=\frac{3}{2}$ et $\ln x_2=-2$ donc : $x_1=e^{\frac{3}{2}}$ et

$x_2=e^{-2}$ finalement : $S=\left\{e\sqrt{e},\frac{1}{e^2}\right\}$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1=0$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$
on pose : $\ln x = X$

on a alors : $3X^2+2X-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+12=16>0$

$X_1=\frac{-2+4}{2\times 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $X_2=\frac{-2-4}{2\times 3}=\frac{-6}{6}=-1$

Donc : $\ln x_1=\frac{1}{3}$ et $\ln x_2=-1$

Donc : $x_1=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$ et $x_2=e^{-1}=\frac{1}{e}$

finalement : $S=\left\{\sqrt[3]{e},\frac{1}{e}\right\}$

4) $\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$ et $\ln x-1\neq 0$

$\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

donc $D_I=]0;e[\cup]e;+\infty[$

$\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x+3}{\ln x-1}+1\geq 0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\geq 0$

$\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$lnx+1$	$-$	0 $+$	$+$	
$lnx-1$	$-$	$-$	0 $+$	
$\frac{lnx+1}{lnx-1}$	$+$	0 $-$	$+$	

$S=\left(]0;e[\cup]e;+\infty[\right)\cap\left(\left]0;\frac{1}{e}\right]\cup]e;+\infty[\right)=\left]0;\frac{1}{e}\right]\cup]e;+\infty[$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

Solution : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\rightarrow 1\\2\ln x-\ln y=3\rightarrow 2\end{cases}$ $x\succ 0$ et $y\succ 0$

La somme des deux équations membres à membres donne :

$5\ln x=5\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

On remplace $x=e$ dans la première équation
On a donc :

$3\ln e+\ln y=2 \Leftrightarrow \ln y=2-3 \Leftrightarrow \ln y=-1$

$\Leftrightarrow y=e^{-1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{e}$ Donc $S=\left\{\left(e;\frac{1}{e}\right)\right\}$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $lnx+ln(x-1)-l\,n\,2=l\,n\,3$

2) $ln(2x+5)+ln(x+1)\le ln4$

3) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

Solution : 1) $lnx+ln(x-1)-l\,n\,2=l\,n\,3$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$ et $x-1>0$

donc : $D_E=]1;+\infty[$

b) $lnx+ln(x-1)-l\,n\,2=l\,n\,3$

$\Leftrightarrow lnx+ln(x-1)=l\,n\,2+l\,n\,3 \Leftrightarrow ln(x(x-1))=l\,n\,6$

Ssi $x(x-1)=6$ ssi $x^2-x-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+24=25>0$

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1}$ **et** $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1}$

$x_1=3$ **ou** $x_2=-2\notin]1;+\infty[$ **donc :** $S=\{3\}$

2) $ln(2x-5)+ln(x+1)\le ln4$

a) cette équation est définie ssi : $x+1>0$ et $2x-5>0$ cad $\left(x>\frac{5}{2}et x>-1\right)$ donc $D_I=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

b)

$ln(2x-5)+ln(x+1)\le ln4 \Leftrightarrow ln((2x-5)(x+1))\le ln4$

$(2x-5)(x+1)\le 4 \Leftrightarrow 2x^2-3x-9\le 0$

$\Delta=b^2-4ac=9-4\times2\times(-9)=9+72=81>0$

$x_1=\frac{3+9}{2\times2}$ et $x_2=\frac{3-9}{2\times2}$ donc : $x_1=3$ et $x_2=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$2x2-3x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[-\frac{3}{2};3\right]\cap\left]\frac{5}{2};+\infty\right[=\left]\frac{5}{2};3\right]$

3) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

a) cette équation est définie ssi : $14-x>0$ et $10+7x-3x^2>0$ après résolution on trouve : $D_I=\left]-1;\frac{10}{3}\right[$

b) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

$14-x\succ10+7x-3x^2 \Leftrightarrow 3x^2-8x+4\succ0$

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-2)\succ0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup]2;+\infty[$

Donc : $S=\left(\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup]2;+\infty[\right)\cap\left]-1;\frac{10}{3}\right[$

$S=\left]-1;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;\frac{10}{3}\right[$

Exercice5 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f:x\to\frac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g:x\to\sqrt{1-ln(e-x)}$

3) $h:x\to\frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$x+1>0$ et $x>0$ et $\ln x>0$ et $ln(\ln x)\ne0$

Cad $x>-1$ et $x>0$ et $x>1$ et $\ln x\ne1$

Cad $x>1$ et $x\ne e$ donc : $D_f=]1;e[\cup]e;+\infty[$

2) cette fonction est définie ssi :

$e-x>0$ et $1\ge ln(e-x)$

Cad $x\prec e$ et $e-x\le e$ Cad $x\prec e$ et $x\ge0$

donc : $D_g=[0;e[$

3) $h:x\to\frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Cette fonction est définie ssi :

$2x>0$ et $(ln(2x))^2-1\succ0$

Cad $x>0$ et $(ln(2x)-1)(ln(2x)+1)\succ0$

$ln(2x)+1=0 \Leftrightarrow \ln 2x=-1 \Leftrightarrow \ln 2x=\ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2e}$

$ln(2x)-1=0 \Leftrightarrow \ln 2x=1 \Leftrightarrow \ln 2x=\ln e \Leftrightarrow x=\frac{e}{2}$

x	0		$\frac{1}{2e}$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$ln2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$ln2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(ln2x+1)(ln2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]0;\frac{1}{2e}\right]\cup\left[\frac{e}{2};+\infty\right[$

2) Dérivée de la fonction $x \to ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction / $f(x) = ln(u(x))$ est dérivable sur I

et $(\forall x \in I)$ ($f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$))

Exemple1 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f(x)=\ln(3x^2+5)$

Solution : la fonction $u: x \to 3x^2+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $3x^2+5 \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors la fonction : $f: x \to \ln(3x^2+5)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x)=\frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5}=\frac{6x}{3x^2+5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exemple2 : calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f(x)=x^2-\ln x$ 2) $f(x)=x\ln x$

3) $f(x)=\ln(1+x^2)$

Solution :1) $f'(x)=(x^2-\ln x)'=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

2) $f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x\ln' x=1\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

3) $f'(x)=(\ln(1+x^2))'=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction : $f(x) = ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I

et $(\forall x \in I)$ ($f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$)

Preuve : (en exercice)
Etudier deux cas $u(x) > 0$ sur I et $u(x) < 0$ sur I.

Exemple1 : calculer la dérivée de la fonction définie sur $I=]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}$

Solution : $\forall x \in]-2;+\infty[$ on a :

$\ln(f(x))=\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}\right)=\ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)-\ln(x^2+1)^3$

$\ln(f(x))=\frac{1}{4}\ln(x^3+8)-3\ln(x^2+1)$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\frac{(x^3+8)'}{x^3+8}-3\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \quad \forall x \in]-2;+\infty[$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\frac{3x^2}{x^3+8}-3\frac{2x}{x^2+1}$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^3+8)(x^2+1)}$

Donc :

$f'(x)=\frac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^3+8)(x^2+1)}f(x)=\frac{-3x(7x^3-x+64)}{4\sqrt[4]{(x^3+8)^3}(x^2+1)^4}$

Exemple2 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln|\ln|x||$

2) $f(x)=\ln|\sin^2 x+3\sin x+4|$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$|x|>0$ et $\ln|x|>0$ cad $x\neq 0$ et $|x|>1$

Donc : $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=(\ln|\ln|x||)'=\frac{(\ln|x|)'}{\ln|x|}$

$f'(x)=\left(\ln\left|\ln|x|\right|\right)'=\frac{1}{x\ln|x|}$

2) $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

cette fonction est définie ssi : $\sin^2 x+3\sin x+4\succ 0$

on pose : $t=\sin x$ donc : t^2+3t+4

$\Delta=9-16=-7\prec 0$ donc : $t^2+3t+4\succ 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

Alors : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{\left(\sin^2 x+3\sin x+4\right)'}{\sin^2 x+3\sin x+4}=\frac{2\sin x\cos x+3\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+4}$$

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;

$F(x)=l\,n(|u(x)|)+Cte$

Applications : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=]0;1[;\ g(x)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=]-\infty;1[;\ h(x)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;\ k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

5) $M(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

6) $N(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

7) $I=]3;+\infty[;\ q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

Solution : 1)on a $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{\left(x^4+2\right)'}{x^4+2}$

Donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+2\right|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x^4+2>0$ donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+2\right)+k$

2) $f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}=\frac{(lnx)'}{lnx}$

donc les fonctions primitives sont :

$G(x)=\ln\left|\ln x\right|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x\in]0;1[$ donc : $\ln x\prec 0$

Donc : $F(x)=\ln(-\ln x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $I=]-\infty;1[;\ h(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)'}{x-1}$ donc les fonctions primitives sont : $H(x)=\ln|x-1|+k$

Puisque : $x\in]-\infty;1[$ donc : $x-1\prec 0$

Donc : $H(x)=\ln(1-x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;\ k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}$ donc les fonctions primitives sont : $K(x)=\ln|\sin x|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $m(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$m(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

Donc les fonctions primitives sont :

$$M(x)=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+k$$

6) $n(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}=\frac{(x-3)\left(x^2+5x+12\right)+38}{x-3}$

Donc : $n(x)=x^2+5x+12+\frac{38}{x-3}$

Donc les fonctions primitives sont :

$N(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+12x+38\ln|x-3|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $I=]3;+\infty[;\ q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

$$q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}=\frac{\frac{1}{(x-2)}}{\ln(x-2)}=\frac{(\ln(x-2))'}{\ln(x-2)}$$

Donc : donc les fonctions primitives sont :

$Q(x)=\ln|\ln(x-2)|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x\in D);\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

2) en déduire la fonction primitive de f sur $]-\infty;-2[$

Tel que $F(-3)=\ln 2$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x-2\neq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times 1=1+8=9>0$

$x_1=\frac{-1+3}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-3}{2\times 1}=\frac{-4}{2}=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}/\{-2;1\}$

$$f(x)=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Donc : $\begin{cases}a+b=5\\2a-b=1\end{cases}$ Donc: $3a=6$ Donc: $a=2$

Donc : $b=3$ Donc: $(\forall x\in D_f);\ f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}/\{-2;1\});\ f(x)=2\frac{(x-1)'}{x-1}+3\frac{(x+2)'}{x+2}$

$F(x)=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+k \quad k\in\mathbb{R}$

$x\in]-\infty;-2[\Leftrightarrow x<-2$ et $x<1$

Donc : $x+2<0$ et $x-1<0$

Donc : les fonctions primitives sont :

$$F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)+k \quad k\in\mathbb{R}$$

$F(-3)=\ln 2\Leftrightarrow 2\ln(4)+3\ln(1)+k=\ln 2$

$k=\ln 2-2\ln(2^2)\Leftrightarrow k=-3\ln 2$

Donc : $F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)-3\ln 2$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition : Soit a un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par $\log_a$ définie sur]0, +∞[par :($\forall x$ ∈]0, +∞[) ($\log_a=\frac{\ln x}{\ln a}$) S'appelle :

la fonction logarithmique de base $\boldsymbol{a}$

Exemples : 1)Pour: $a=e$ on aura : $\log_e=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$

2) $\log_2 4=\frac{\ln 4}{\ln 2}=\frac{\ln 2^2}{\ln 2}=\frac{2\ln 2}{\ln 2}=2$

2) Propriétés et règles de calcul :

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

a) Propriétés caractéristiques

- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y))$
- $(\forall x>0)\left(Log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-Log_a(x)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)\left(Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x^r)=rLog_a(x)$

Preuve : Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la Fonction ln

b) Propriétés : La fonction $\log_a$ est une bijection de]0, +∞[vers $\mathbb{R}$

1) ($\forall x>0$)($\forall y>0$)($\log_a(x)=\log_a(y)\Leftrightarrow x=y$)

2) ($\forall x>0$)($\forall r\in\mathbb{Q}$)($\log_a(x)=r \Leftrightarrow x=a^r$

c)Propriété : La fonction $\log_a$ est continue dérivable sur]0, +∞[et ($\forall x$ ∈]0, +∞[)

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x\ln a}$$

Preuve : (En exercice)

2)Etude et représentation de $\log_a$:

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

1)La fonction $\log_a$ est définie sur]0, +∞[.

2) La fonction $\log_a$ est continue et dérivable

sur]0, +∞[et (∀x ∈]0, +∞[) ($\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x\ln a}$)

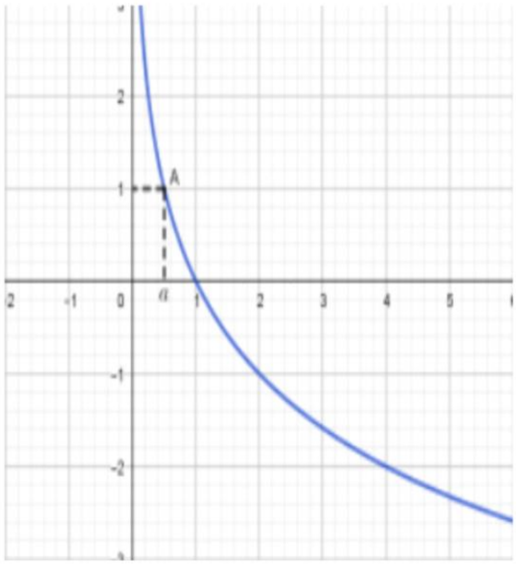
donc le signe de $\log'_a$ dépend du signe de lna, ce qui nous amène à discuter deux cas :

$lna > 0$; $lna < 0$

Si $a \in]0,1[$ alors $lna < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\,lna} < 0\right)$.

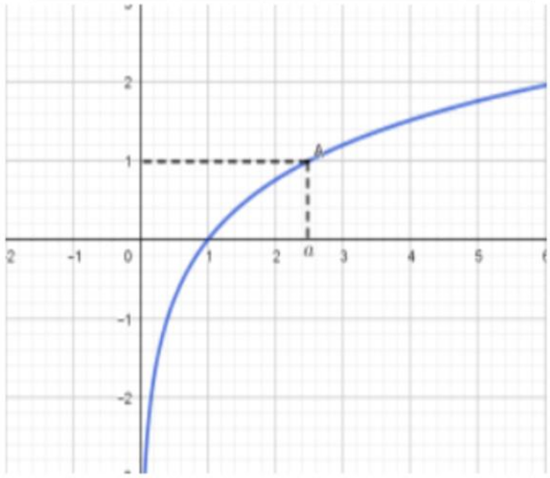
x	0 $\quad a \quad$ 1 $\quad +\infty$
$Log'_a(x)$	$-$ $\quad$ $-$
$Log_a(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↘ 0 ↘ $-\infty$



Si $a \in]1,+\infty[$ alors $lna > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(Log'_a(x) = \frac{1}{x\,lna} > 0\right)$.

x	0 $\quad 1$ $\quad a$ $\quad +\infty$
$Log'_a(x)$	$+$ $\quad$ $+$
$Log_a(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$



Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

Solution :1)

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} = -2\times 1 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4 = 4\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 4\times 1 = 4$$

$$A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right) = -\log_2 5 + \log_2(5\times 2) + \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$A = 1 - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Exercice7 : On pose $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$

Calculer β en fonction α

Solution : on a : $\alpha=\frac{\ln 100}{\ln 40}=\frac{\ln\left(2^2\times 5^2\right)}{\ln\left(2^3\times 5\right)}=\frac{2\ln 2+2\ln 5}{3\ln 2+\ln 5}$

D'autre part : $\beta=\frac{\ln 25}{\ln 16}=\frac{\ln\left(5^2\right)}{\ln\left(2^4\right)}=\frac{2\ln 5}{4\ln 2}=\frac{\ln 5}{2\ln 2}$

Aussi on a : $\alpha=\frac{2+2\frac{\ln 5}{\ln 2}}{3+\frac{\ln 5}{\ln 2}}=\frac{2+4\beta}{3+2\beta}$

$$\alpha=\frac{2+4\beta}{3+2\beta}\Leftrightarrow \alpha\left(3+2\beta\right)=2+4\beta\Leftrightarrow 3\alpha+2\alpha\beta=2+4\beta$$

$$3\alpha+2\alpha\beta=2+4\beta\Leftrightarrow 2\left(\alpha-2\right)\beta=2-3\alpha\Leftrightarrow \beta=\frac{2-3\alpha}{2\left(\alpha-2\right)}$$

3) Cas particulier a = 10 ; logarithme décimal :

Définition : La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par $\boldsymbol{log}$ et ($\forall \boldsymbol{x}\in]\mathbf{0},+\infty[$) ($\log=\frac{\ln x}{\ln 10}$)

Propriétés : 1) $log(10)=1$

2) $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(log(x)=r \Leftrightarrow x=10^r)$

3) $(\forall r\in\mathbb{Q})(\,log(10^r)=r$

4) $log(x)>r\Leftrightarrow x>10^r$

5) $log(x)\leq r\Leftrightarrow 0<x\leq 10^r$

Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_{10}100$ 2) $\log_{10}0,0001$

3) $A=\log\left(250000\right)+\log\sqrt{250}-\log\left(125\right)$

Solution : 1) $\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2\times 1=2$

2) $\log_{10}0,0001=\log_{10}10^{-4}=-4\log_{10}10=-4$

3) $A=\log\left(250000\right)+\log\sqrt{250}-\log\left(125\right)$

$$A=\log\left(250000\right)+\log\sqrt{250}-\log\left(125\right)$$

$$A=\log\left(5^2\times 10^4\right)+\frac{1}{2}\log\left(5^2\times 10\right)-\log\left(5^3\right)$$

$$A=\log 5^2+\log 10^4+\frac{1}{2}\left(\log 5^2+\log 10\right)-3\log 5$$

$$A=2\log 5+4\log 10+\frac{1}{2}\left(2\log 5+1\right)-3\log 5$$

$$A=2\log 5+4+\log 5+\frac{1}{2}-3\log 5=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

Exercice 8 : déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq 10^{20}$

Solution : $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq 10^{20}\Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\geq\log\left(10^{20}\right)$

$$\Leftrightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right)\geq 20\Leftrightarrow n\geq\frac{20}{l\,og\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Le plus petit entier naturel n_0 est donc :

$$n_0=E\left(\frac{20}{l\,og\left(\frac{3}{2}\right)}\right)+1=114$$

Exercice 9 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3\left(2x\right)\times\left(\log_5\left(x\right)-1\right)=0$

2) $2\left(\log x\right)^2-19\log x-10=0$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Solution :1) a) cette équation est définie ssi : $x>0$ et $2x>0$ donc : $D_E=]0;+\infty[$

b) Résoudre l'équation : $\log_3\left(2x\right)\times\left(\log_5\left(x\right)-1\right)=0$

ssi $\log_5\left(x\right)-1=0$ et $\log_3\left(2x\right)=0$

ssi $\log_5\left(x\right)=\log_5\left(5\right)$ et $\log_3\left(2x\right)=\log_3\left(1\right)$

ssi $x=5$ et $x=\frac{1}{2}$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2};5\right\}$

2) $2\left(\log x\right)^2-19\log x-10=0$

$D_E=]0;+\infty[$ on pose : $\log x=X$ donc :

$$2X^2-19X-10=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(19\right)^2-4\times 2\times\left(-10\right)=361+80=441=\left(21\right)^2>0$$

$X_1=\frac{19+21}{2\times 2}=10$ et $X_2=\frac{19-21}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

Donc : $\log x_1 = 10$ et $\log x_2 = -\frac{1}{2}$

Donc : $x_1 = 10^{10}$ et $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10} \right\}$

Exercice 10 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$ 2) $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$x - \frac{1}{2} > 0$ donc : $x > \frac{1}{2}$ donc : $D_I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

car : $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante

donc : $x \leq 1$ donc : $S = \left]-\infty; 1\right] \cap \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[= \left]\frac{1}{2}; 1\right]$

2)a) cette équation est définie ssi :
$4x > 0$ et $16x > 0$ et $2x > 0$ et $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$

donc : $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{4}$

donc : $D_I = \left]0; +\infty\right[- \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

b) $\forall x \in D_I : \log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4x) + \log_{4x}(4) = 4$

Or on a $\log_a(a) = 1$ donc :

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{4x}(4) = 2$

Et on a : $\log_{2x}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(2x)} = \frac{1}{\log_2(2x)}$

$\log_2(2x) = \log_2(2) + \log_2 x = 1 + \log_2 x$

Donc : $\log_{2x}(2) = \frac{1}{1 + \log_2 x}$

D'autre part on a : $\log_{4x}(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(4x)} = \frac{1}{\log_4(4x)}$ et

$\log_4(4x) = \log_4(4) + \log_4 x = 1 + \log_4 x$

Et puisque : $\log_4 x = \frac{\ln(x)}{\ln(4)} = \frac{\ln(x)}{2\ln(2)} = \frac{1}{2}\log_2 x$

Donc : $\log_{4x}(4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\log_2(x)} = \frac{2}{2 + \log_2(x)}$

Donc l'équation devient : $\frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} = 2$

Cad : $2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 0$

Cad : $\log_2 x = \frac{-3}{2}$ ou $\log_2 x = 0$

Cad : $x = 2^{\frac{-3}{2}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $x = 1$

donc : $S = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 \right\}$

4) Applications

Exemple1: A) soit la fonction g définie

par : $g(x) = x - lnx$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
3) en déduire que : $\forall x > 0 \quad x > lnx$
B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + lnx}{x - lnx}; si..x \succ 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1)Montrer que $D_f = [0; +\infty[$

2)Montrer que f est continue à droite de 0

3)calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\quad f'(x)=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7)déterminer les points d'intersections de C_f et la Droite : $(\Delta): y=1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($ln2\approx 0,7$, $e\approx 2,7$)

Solution :1) $D_g=]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x-lnx=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$$

Car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+} x-lnx=+\infty$ Car : $\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty$

2) $g'(x)=(x-lnx)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

Le signe de: $g'(x)$ est celui de $x-1$ car $x\in]0;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3)on remarque que : que la fonction g

Admet une valeur minimal en $x_0=1$

Donc : $g(1)\le g(x)\quad \forall x\in]0;+\infty[\qquad g(1)=1$

Donc : $0<1\le x-lnx$ Donc : $lnx<x \quad \forall x\in]0;+\infty[$

B) 1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx} \\ f(0)=-1\end{cases}$

f est définie ssi $x-lnx\neq 0$ et $x>0$

On a $0<x-lnx$ donc : $x-lnx\neq 0$ et on a $f(0)=-1$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) $$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+lnx}{x-lnx}=\lim_{x\to0^+}\frac{lnx\left(\frac{x}{lnx}+1\right)}{lnx\left(\frac{x}{lnx}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{lnx}+1}{\frac{x}{lnx}-1}$$

Et on a $\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty$ donc $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{lnx}=0^-$ et $\frac{0}{\infty}=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-1=f(0)$$

Donc :f est continue à droite de 0

3)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+lnx}{x-lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{lnx}{x}\right)}{x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{lnx}{x}}{1-\frac{lnx}{x}}=1$$

Car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

*Interprétation graphique :*la droite $y=1$ est une asymptote a la courbe de f

4) Etude de la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+lnx}{x-lnx}+1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+lnx+x-lnx}{x-lnx}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x(x-lnx)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x-lnx}=0=f'_d(0)$$

Donc : f est dérivable à droite de 0

5)

$$f'(x)=\left(\frac{x+lnx}{x-lnx}\right)'=\frac{(x+lnx)'(x-lnx)-(x+lnx)(x-lnx)'}{(x-lnx)^2}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-lnx)-(x+lnx)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-lnx)^2}=\frac{x-lnx+1-\frac{lnx}{x}-x-lnx+1+\frac{lnx}{x}}{(x-lnx)^2}$$

$$\forall x\in]0;+\infty[\; : f'(x)=\frac{2-2lnx}{(x-lnx)^2}=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$$

6) tableau de variation de f : $x\in]0;+\infty[$

Le signe de: $f'(x)$ est celui de $1-lnx$

$$1-lnx>0 \Leftrightarrow 1>lnx \Leftrightarrow \ln e>lnx \Leftrightarrow e>x$$

Tableau de variation de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

7) points d'intersections de C_f et $(\Delta): y=1$?

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x+lnx}{x-lnx}=1 \Leftrightarrow x+lnx=x-lnx$$

$$f(x)=1 \Leftrightarrow 2lnx=0 \Leftrightarrow x=1$$

le point d'intersection de C_f et la Droite : $(\Delta): y=1$

est : $A(1;1)$

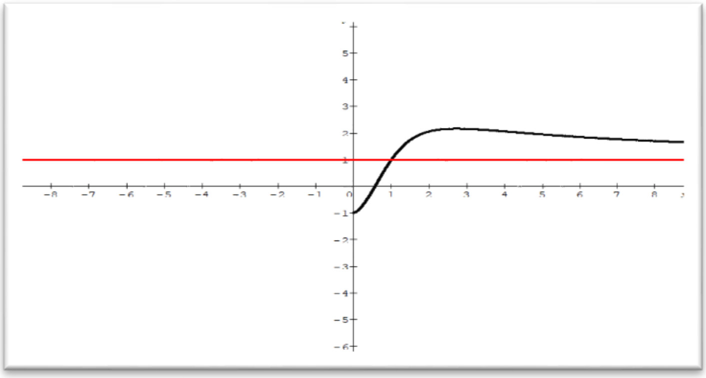
8) f est continue sur $D_f=[0;+\infty[$ donc continue

Sur : $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et on a : $f(1)=\frac{\frac{1}{2}+ln(1)}{\frac{1}{2}-ln(1)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1>0$

Et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-ln\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-ln2}{\frac{1}{2}+ln2}=\frac{\frac{1-2ln2}{2}}{\frac{1+2ln2}{2}}=\frac{1-2ln2}{1+2ln2}<0$

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$ cad C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

9)



Exemple2 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

1)a)calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$

b) montrer que : $\forall x\in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x)=(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions f et g
Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}\prec\ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

4)monter que : $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\prec\ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(1+x)$?

On pose : $t=1+x$ $\quad x\to-1^+ \Leftrightarrow t\to0^+$

$\lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$

Et on a : $\lim_{x\to -1^+} -x+\frac{x^2}{2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc : $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$? on a : $\lim_{x\to +\infty} -x+\frac{x^2}{2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x\to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = ?$ on a : $\lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

Et $\lim_{x\to -1^+} -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3} = \frac{11}{6}$ donc : $\lim_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$

b) montrons que : $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right) \text{ ?}$$

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = \ln(1+x) - \left(\frac{2x^3-3x^2+6x}{6}\right)$$

$$g(x) = (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

Déduction de : $\lim_{x\to +\infty} g(x)$?

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$?On pose: $t = 1+x$

$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{6x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty$$

Donc : $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty$

C1) Etude des variations les fonctions f?

$\forall x \in]-1;+\infty[$ $x \to \ln(1+x)$ est dérivable donc f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in]-1;+\infty[$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc : *tableau de variations de f* :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

C2) Etude des variations les fonctions g ?

g est dérivable sur $\forall x \in]-1;+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{1+x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$

Donc : *tableau de variations de g* :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) déduction d'un encadrement de $\ln(1+x)$?

Des variations les fonctions f et g en deduit que :

$g(x) \prec 0 \prec f(x) \quad \forall x \in]0;+\infty[$ donc :

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \prec 0 \prec \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Donc : $x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$?

Donc : $x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ on deduit que

$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \prec \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \prec \frac{1}{2}$ et puisque : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4)montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$?

Soit ψ la fonction définie $\forall x \in]-1;+\infty[$

Par : $\psi(x) = g(x)+\frac{x^4}{4}$

ψ est dérivable sur $\forall x \in]-1;+\infty[$ et on a :

$\psi'(x) = g'(x)+x^3 = \frac{x^4}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in]-1;+\infty[$

$\psi'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ donc ψ strictement croissante

sur $]-1;+\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) = 0$

donc : $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \quad \forall x \in]0;+\infty[$

donc : $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Exemple3 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3(7x-1)^2 = 0$ 2) $\log_3(5x+1) = 2$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$7x-1 \neq 0$ donc : $x \neq \frac{1}{7}$ donc : $D_I = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{7}\right\}$

¨b) $\log_3(7x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 7x-1=1$ ou $7x-1=-1$ $\Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$ ou $x=0$

donc : $S = \left\{0;\frac{2}{7}\right\}$

2) $\log_3(5x+1) = 2$

2)a) cette équation est définie ssi : $5x+1>0$

Donc : $D_E = \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$

$\log_3(5x+1) = 2 \Leftrightarrow 5x+1 = 3^2 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$

Puisque : $\frac{8}{5} \in \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$ alors :: $S = \left\{\frac{8}{5}\right\}$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

a) cette équation est définie ssi : $5x+1>0$ et

$\log_3(7x-1)^2 \neq 0$ et $7x-1 \neq 0$

cad : $x \succ -\frac{1}{5}$ et $x \neq \frac{1}{7}$ et $x \neq \frac{2}{7}$ et $x \neq 0$

$D_E = \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[- \left\{0;\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right\}$

D'abord étudions le signe de : $\log_3(7x-1)^2$

$\log_3(7x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 \geq 1$ car : $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante

$\Leftrightarrow (7x-1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x(7x-2) \geq 0$

1cas : si : $x \in \left]-\frac{1}{5};0\right[\cup \left]\frac{2}{7};+\infty\right[$ on a donc :

$\log_3(7x-1)^2 \geq 0$

$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(5x+1) \leq \log_3(7x-1)^2$

$\Leftrightarrow 5x+1 \leq (7x-1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq 49x^2 - 19x$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{5};0\right[\cup \left]\frac{19}{49};+\infty\right[$

2cas : si : $x \in \left]0;\frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[$ on a donc :

$\log_3(7x-1)^2 \prec 0$

$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(7x-1)^2 \leq \log_3(5x+1)$

$\Leftrightarrow (7x-1)^2 \leq 5x+1 \Leftrightarrow 49x^2 - 19x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left(\left]0;\frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[\right) \cap \left[0;\frac{19}{49}\right] \Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[$

Donc : $S = \left]-\frac{1}{5};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[\cup \left[\frac{19}{49};+\infty\right[$

Exemple4: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2)montrer que le domaine d'étude de f est :

$D_E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

Solution : 1) $f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

cette fonction est définie ssi : $x \neq 0$ et $x \neq 1$ et $\frac{x+1}{x-1} \neq 0$

donc : $x \neq -1$ et $x \neq 1$ et $x \neq 0$

donc : $D_I = \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$

2)le domaine d'étude de f ?

a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$ on a $-x \in \mathbb{R} - \{-1;0;1\}$

b) $f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|$

$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

Donc : $f(-x) + f(x) = -6$

Donc : $f(2\times 0 - x) + f(x) = 2\times(-3) - f(x)$

Donc le point : $I(0;-3)$ est un centre de symétrie de (C_f) la courbe de f

donc Il suffit d'étudier f sur : $D_E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) les limites aux bornes de D_E ?

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$

donc : $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

on a : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4) Etude des variations de f sur D_E ?

La fonction f est dérivable sur les intervalles $]1;+\infty[$ et $]0;1[$ (somme et composées de fonctions dérivables)

et on a : $f'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{(2x^2-1)(x^2-3)}{2x^2(x^2-1)}$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : *tableau de variations de* f :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2}/2)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Etude des branches infinies de $\left(C_f\right)$

la courbe de f ?

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc : $x=0$ est une asymptote

de la courbe de f

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ donc : $x=1$ est une asymptote

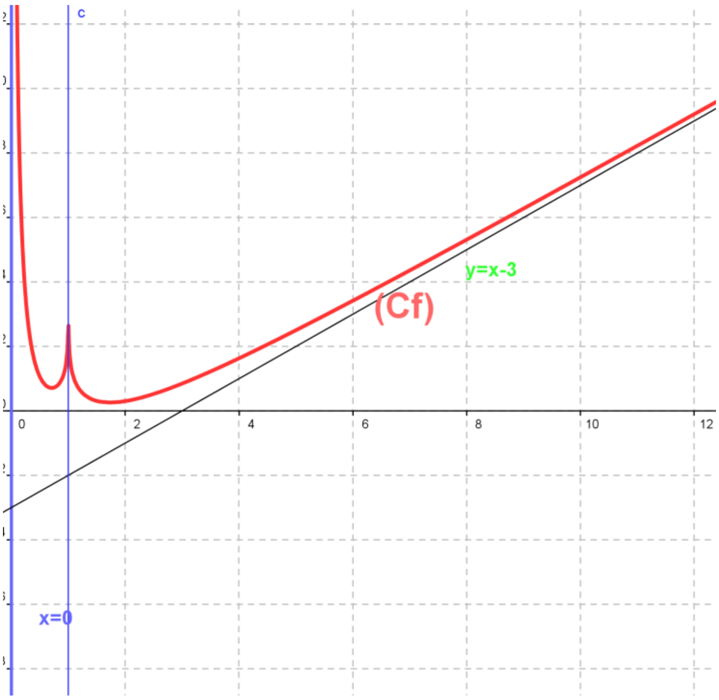
de la courbe de f

- $x=-1$ est une asymptote de la courbe de f (par symétrie)

- On a : $f(x)-(x-3) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-3) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$$

Donc : $y=x-3$ est une asymptote oblique de la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien