1. Bac 2014 session normale

I. Soit la fonction g définie sur $D =]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0,+\infty[$ . ... (0,5)

2. Vérifier que : $g(1) = 0$ puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0,1]$ et $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1,+\infty[$ . ... (0,75)

II. On considère f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm)

1. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>}} f(x)$; puis interprété géométriquement ce résultat . ... (0,5)

2. ..
   a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ . ... (0,25)
   b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$) puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (1)
   c. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$ . ... (0,25)

3. ..
   a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$ . ... (1,5)
   b. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ puis en déduire que : $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (1)

4. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion , on ne le déterminera pas) . ... (0,75)

5. On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$.
   a. Montrer que $H : x \mapsto x\ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$ puis en déduire que $I = e$ . ... (0,5)
   b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $J = 2e - 1$ . ... (0,5)
   c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ . ... (0,5)

2. Bac 2015 session normale (fuite الذي تم تسريبه)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm) .

I.

1. Montrer que : $D_f = \left]0;e\right[\cup \left]e;+\infty\right[$ (D_f ensemble de définition de la fonction f) . ... (0,5)

2. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces deux résultats . ... (0,75)

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis en déduire que : la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction . ... (0,5)

c. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ on remarque $x(1-\ln x) = x - x\ln x$) . ... (0,5)

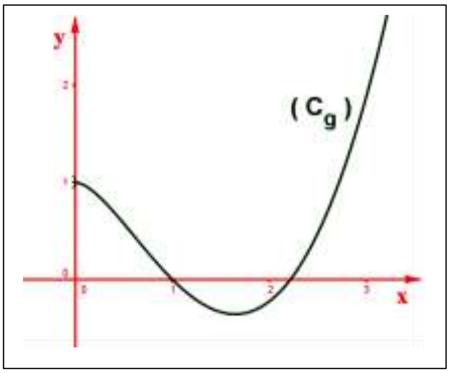
3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f . ... (0,75)

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\left]0,1\right]$ et la fonction f est croissante sur $\left[1;e\right[$ et $\left]e;+\infty\right[$ . ... (1)

c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f . ... (0,25)

II. ..



Soit la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$.
Et soit (C_g) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (voir la figure) .

1. ..

a. Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation suivante (E) $x \in \left]0;+\infty\right[$, $g(x) = 0$ . ... (0,5)

b. On donne le tableau suivant :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

montrer que l'équation (E) admet une solution α tel que $2,2 < \alpha < 2,3$ . ... (0,5)

2. ..

a. Vérifier que : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f . ... (0,25)

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation (Δ) : $y = x$ coupe la courbe (C_g) en deux points d'abscisses respectives 1 et α . ... (0,5)

c. A partir de la courbe (C_f) , déterminer le signe de g sur $[1,\alpha]$, et montrer que $f(x) - x \le 0$ pour tout x de $[1,\alpha]$ . . .. (0,5)

3. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f) de f et la droite (Δ) . ... (1,25)

4. ..

a. Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ (on remarquera $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f).
.... (0,75)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$ . ... (0,75)

III. ..

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $0 \le u_n \le \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,5)
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 2) c -) (0,5)
3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)

3. Bac 2015 session de rattrapage

I. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x\ln x$.

1. ..
   a. Montrer que : $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,5)
   b. Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0,1]$ et la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$ .. (0,5)
2. Calculer : $g(1)$ puis en déduire que $g(x) \ge 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,75)

II. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$.

Et soit (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité de $1\ cm$) .

.

1. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ on remarque $f(x) = \frac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$). .... (0,75)
2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ puis en déduire la nature du branche parabolique de la courbe (C_f) au voisinage $+\infty$ . ... (0,75)
3. .
   a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,75)
   b. Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$ . ... (0,25)
   c. Montrer que :la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$ . ... (0,5)
4. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on admettra que la courbe de f admet deux points d'inflexions l' une a pour abscisse 1 et l'autre a pour abscisse comprise entre 2 et $2,5$ et on prend $f(0,3) = 0$ . ... (0,75)
5. ..

a. Montrer que : $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$ . ... (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ . ... (0,75)

6. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2\ln x}{|x|}$.

a. Montrer que la fonction h est paire et $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,75)

b. Construire dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_h) de la fonction h . ... (0,5)

4. Bac 2016 session de rattrapage

I. Soit la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$.

on considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	$g(1)$	$\nearrow +\infty$

1. Calculer : $g(1)$. .... (0,25)

2. En déduire à partir du tableau que : $g(x) > 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ .... (0,75)

I. On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$

par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$.

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm) .

1. Montrer que : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat . ... (0,75)

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pour le calcul de a limite on pourra utiliser l'écriture suivante

$f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$ . ... (0,5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées .... (0,5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,75)

b. En déduire que : la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ . ... (0,75)

4. ..

a. Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

b. Montrer que : $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) au point I . . (0,25)

c. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C_f) . ... (0,75)

5. ..

a. Montrer que : $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_1^2(x+1)\ln x\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$. .... (0,75)

c. calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ . ... (0,5)

6. Résoudre graphiquement l'inéquation : $x\in]0,+\infty[\ ;\ (x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$ . ... (0,5)

5. Bac 2017 session normale

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$.

I. ..

1. Vérifier que : $g(1)=0$ . ... (0,25)
2. A partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :
   - Montrer que : $g(x)\leq 0$ pour tout x de $]0,1]$.
   - Montrer que : $g(x)\geq 0$ pour tout x de $[1,+\infty[$ . .... (1)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat . ... (0,5)
2. ..

a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . ... (0,25)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique dont la direction est la droite (D) d'équation $y=x$ . ... (0,75)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (1)

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$ (0,75)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ . ... (0,25)

4. ..

a. Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$. .... (0,5)

b. En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées . ... (0,5)

c. Montrer que : $f(x)\leq x$ pour tout x de $[1,2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur $[1,2]$ . ... (0,75)

5. Construire dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) (on admettra que la courbe de f possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse comprise entre $2{,}4$ et $2{,}5$. .... (1)

6. ..

a. Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ . ... (0,5)

b. Montrer que : $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ . ... (0,25)

c. Montrer , à l'aide d'une intégration par parties , que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx = (1-\ln 2)^2$. .... (0,5)

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ . ... (0,5)

II. On considère la suite numérique définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer par récurrence que : $1 \le u_n \le 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,5)

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 4) c-) .(0,5)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)

6. Bac 2018 session de rattrapage

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2(x) + 2\ln x.$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction g sur $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	

I. ..

1. Calculer : $g(1)$ . ... (0,25)

2. A partir de ce tableau , déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ . ... (0,5)

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

1. ..

a. Vérifier que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ . ... (0,5)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$. .... (0,5)

c. Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f) . ... (0,25)

2. Montrer que $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat . ... (0,75)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ . ... (1)

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et la fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$. (0,5)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$ . ... (0,5)

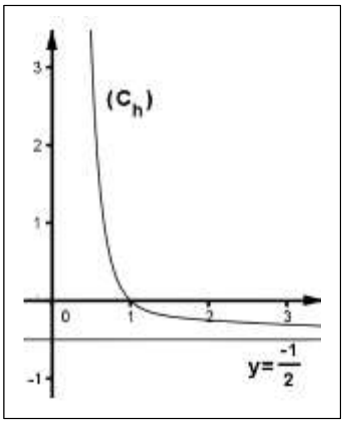
4. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ l a droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm) . ... (1)

III. On considère la fonction numérique h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-x$.

1. ..

a. Vérifier que : $h(1)=0$ . ... (0,25)

b. Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h .
déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ puis en déduire que $f(x)\leq x$ pour tout x de $[1,+\infty[$ . ... (0,75)



2. On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,75)

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III 1) b-) .
.... (0,75)

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite . ... (0,5)

7. **Bac 2019 session normale**

Première Partie :

Soit la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm) .

1. .Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement . ... (0,5)

2. ..

a. Vérifier que :pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ . ... (0,25)

b. En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . ... (0,5)

c. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.
.... (0,5)

d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$. .... (0,75)

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$

et que pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$. .... (0,5)

b. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$. .... (1)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f . ... (0,5)

4. ..

a. Montrer que : $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ . ... (0,5)

b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées . ... (0,5)

5. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x)-x = \dfrac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ puis on déduire la position relative de (C_f) et (Δ) . ... (0,5)

b. Construire (Δ) et (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. .... (1)

6. ..

a. Montrer que : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$. (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ . ... (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. .... (0,5)

Deuxième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. ..

a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,5)

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante . ... (0,5)

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente . ... (0,5)

2. Calculer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)