EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes.

$A=\ln\left(3-\sqrt{3}\right)+\ln\left(3+\sqrt{3}\right)$ $\quad B=\ln e^3-\ln\dfrac{2}{e}+\ln 2$

$C=3\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 9-2\ln(2\sqrt{6})$

Exercice 2:

Résolvez dans **IR** les équations suivantes.

1) $\ln x+\ln(3x+2)=\ln(2x+3)$
2) $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln(x+7)$
3) $4(\ln x)^2-4\ln x-3=0$

Exercice 3:

Résolvez dans **IR** les inéquations suivantes.

1) $\ln\left(3-x\right)-\ln\left(x+1\right)\le 0$
2) $4(\ln x)^2-4\ln x-3\le 0$

Exercice 4:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

1) $f(x)=(\ln(x)-2)\sqrt{4-x}$
2) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$
3) $f(x)=\dfrac{2x}{1-\ln x}$

Exercice 5:

Calculez les limites suivantes.

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ $\quad B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x}$

$C=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$ $\quad D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+4x\right)}{x}$

$E=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ \ln(1+\dfrac{1}{x^2})$ $\quad F=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)\ln x}{x^2-1}$

$G=\lim\limits_{x\to 0^+}x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$ $\quad H=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

Exercice 6:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et explicitez $f'(x)$.

1) $f(x)=x^2(2\ln x-1)$ $\quad$ 2) $f(x)=\ln\sqrt{1+4x+x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{1+x}$ $\quad$ 4) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

Exercice 7:

la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{\ln x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $I=[1;+\infty[$.
2) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite en **1**. et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) **a)** Déterminer l'intersection de $(\Delta): y=x$ et (C_f).
   b) Tracer (C_f) et (Δ).
4) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J=[0,+\infty[$.
   b) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=0 \quad et \quad u_{n+1}=g(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de IN.}$$

a) Montrer que pour tout n de IN on a : $0\le u_n\le e$.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 8:

Partie1 : Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(1+x)$$

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ deux solutions **0** et α et vérifier que $3,8<\alpha<4$.
3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$
4) Montrer que pour tout x de $]-1;+\infty[$, on a: $g(x)\le 1$

Partie2 : Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \quad si\ x>0 \quad et \quad f(0)=0.$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite en **0**.
3) Montrer que $(\forall x>0);\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
4) Dresser le tableau de variation de f
5) vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8:

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

1) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$; $\quad I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
2) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-x+1}$; $\quad I=IR$.
3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $\quad I=]1;+\infty[$
4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; $\quad I=]0;+\infty[$
5) $f(x)=\tan x$; $\quad I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 9:

Partie A: Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-x-2\ln(x)+1$$

1) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$ on a :

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B: Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$

par : $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$, et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(unité 2 cm)**

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, et interpréter graphiquement.

3) Montrer que : $(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f.

4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

5) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=x+\ln x$$

a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]\frac{1}{2};1[$. Et vérifier que $e^{-\alpha}=\alpha$ **.**

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 10:

Partie A : ***Etude d'une fonction auxiliaire.***

g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(1+x^2)$$

1) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Partie B : ***Etude d'une fonction.***

f est la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}\quad si\quad x>0\quad et\quad f(0)=0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$,et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) a) Vérifier que:

$$(\forall x>0);\ f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que $(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f.

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11:

Partie A: Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x+(x-2)\ln x$$

a) Montrer que : $(\forall x>0);\ g'(x)=2\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

b) Etudier les variations de g. Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B: Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$ et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(unité 2 cm)**

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées**.**

3) a) Vérifier que $(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente **(T)** à la courbe (C_f) au point d'abscisse **1**.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x-1-\ln x$.

En déduire le signe de $h(x)$.

c- Montrer que $f(x)-x=(\ln x-1).h(x)$ et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à **(T).**

5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

De la même façon que personne n'est capable d'expliquer pourquoi les étoiles sont belles, c'est difficile d'exprimer la beauté des mathématiques Yoko Ogawa