

La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien notée \ln est l'unique fonction, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ [et Vérifiant $\ln 1 = 0$

et pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Il est continu et strictement croissant sur $]0, +\infty[$.

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels : $\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ 2) $x \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y$

3) $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ 4) $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

5) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$ 6) $e \approx 2,71828 \dots$ et $\ln(e) = 1$

7) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ 8) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

9) $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ 10) $\ln(x^r) = r \ln x$

11) $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 12) $(e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$

13) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall y > 0$

(Limites usuelles)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$)

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$)

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Dérivée et primitives de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

1) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction : $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I

et $(\forall x \in I) (f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)})$

2) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur

I alors les fonctions primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont

les fonctions : $F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

Soit $(a > 0)$ et $(a \neq 1)$

On note \log_a la fonction logarithmique de base a

définie sur $]0, +\infty[$ par : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\log_a = \frac{\ln x}{\ln a})$

$\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1) $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$ 2) $\log_a(1/x) = -\log_a x$

3) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ 4) $\log_a(\sqrt{x}) = (1/2)\log_a x$

5) $\log_a(x^r) = r \log_a x$

6) $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

$\forall x \in]0, +\infty[; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$ donc La fonction \log_a

est une bijection de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R}

1) $(\forall x > 0)(\forall y > 0) (\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$

3) \log_a strictement croissante si $(a > 1)$

\log_a strictement décroissante si $(0 < a < 1)$

Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par **log** et $(\forall x \in]0, +\infty[)$

$(\log x = \frac{\ln x}{\ln 10})$ et on a : $\log(10) = 1$

1) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

2) $(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(10^r) = r)$ 3) $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

